

Title	非線形動的空気力と吊橋の耐風応答解析に関する研究(Dissertation_全文)
Author(s)	小川, 一志
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1977-05-23
URL	<a href="http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r3343">http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r3343</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author

工
375 函
1-0

非線形動的空氣力と吊橋の耐風応答解析  
に関する研究

昭和 51 年 10 月

小 川 一 志



非線形動的空気力と吊橋の耐風応答解析  
に関する研究

昭和 51 年 10 月

小 川 一 志





# 論文題目

## 非線形動的空気力と吊橋の耐風応答解析に関する研究

### 目次

第 1 章	緒 論	1
1.1	概 説	1
1.2	従 来 の 研 究	2
1.3	本論文の目的と概要	3
第 2 章	非線形動的空気力係数の誘導	5
2.1	概 説	5
2.2	非線形動的空気力係数の表示法	6
2.3	非線形動的空気力係数の算出法	18
2.4	実験誤差の評価	21
2.4.1	概 説	21
2.4.2	対数減衰率の測定誤差	22
2.4.3	振動数の測定誤差	23
2.4.4	位相差の測定誤差	24
2.5	考 察	25
2.6	結 言	28
〔補 遺〕	対数減衰率の定義	29
第 3 章	非線形動的空気力を受ける 2 次元剛体の耐風応答	33
3.1	概 説	33
3.2	2 次元剛体の耐風応答	33
3.2.1	ねじれ 1 自由度	33
3.2.2	たわみ 1 自由度	36
3.2.3	たわみ・ねじれ 2 自由度	36
3.3	振動条件が 2 次剛体の耐風応答におよぼす影響	38
3.3.1	たわみ・ねじれ 2 自由度振動における対数減衰率の誘導	38
3.3.2	構造減衰が構造物の耐風応答におよぼす影響	40
3.3.3	質量、慣性モーメントが構造物の耐風応答におよぼす影響	43
3.3.4	振動数が構造物の耐風応答におよぼす影響	46

3.3.5	たわみ・ねじれ 2 自由度振動をねじれ 1 自由度振動として扱う ときの問題点	47
3.3.6	連成空気力係数の簡易測定法	49
3.4	2 次元剛体における耐風応答の解析例	50
3.5	結 言	50
第 4 章	非線形動的空気力を受ける 3 次元構造物の耐風応答	55
4.1	概 説	55
4.2	3 次元構造物の運動方程式	55
4.2.1	運動方程式の誘導	55
4.2.2	ねじれ 1 自由度	57
4.2.3	たわみ 1 自由度	58
4.2.4	たわみ・ねじれ 2 自由度	59
4.3	3 次元構造物と 2 次元剛体の耐風応答の比較	60
4.3.1	概 説	60
4.3.2	フラッター振動モード	61
4.3.3	動的空気力係数の非線形性の影響	62
4.4	3 次元構造物の耐風応答	67
4.4.1	概 説	67
4.4.2	気流特性が橋軸方向に変化する場合	67
4.4.3	構造物の空力特性が橋軸方向に変化する場合	72
4.5	結 言	76
第 5 章	減衰器による 3 次元構造物の制振	78
5.1	概 説	78
5.2	減衰器による減衰力の一般力表示	79
5.3	粘性減衰器による 3 次元構造物の制振	80
5.4	動的吸振器による 3 次元構造物の制振	82
5.5	粘性減衰器と動的吸振器による吊橋の制振	86
5.6	結 言	89
第 6 章	結 論	90
参 考 文 献		94

# 第 1 章 緒 論

## 1. 1 概 説

最近の構造物は長大化、高層化の傾向にあるが、それに伴って構造物の剛性が低下する一方、風に対する暴露面積は増大するから、設計上、風の作用をどのように考慮するかは重要な問題となってくる。特に、日本は世界でも有数の強風地帯に位置している関係上、諸外国に比べて一般に設計風速が高く、構造諸元が風の作用によって決定される場合が少くない。風が構造物に及ぼす作用として、静的空気力を介した横たわみ、風荷重、横座屈、ダイバージェンスなどの静的作用と、動的空気力を介したカルマン振動、バフエッティング、ギャロッピング、曲げねじれフラッター、ねじれフラッターなどの動的作用がある。吊橋などの長大構造物の耐風設計に際しては風の作用を全体的に把握して、構造物の空力特性と構造特性の兼合いから風が構造物に及ぼす影響に対してバランスのとれた設計を行なう必要がある。本論文では風の作用としてまだ不確定要因の多い動的作用に着目して長大吊橋の耐風性の検討を行なう。風の動的作用を受けた吊橋の被害例としては、旧タコマ橋が僅か  $19 \text{ m/s}$  の風速でねじれフラッターを発現して落橋した事故が最も有名であろう。その後、吊橋の動的応答に関する研究は吊橋設計者の注目を浴びるようになって、世界各地で数多くの研究がなされているが、我国においても長大吊橋の一大プロジェクトである本州四国連絡橋の架橋計画を一つの契機として多面的な研究がなされている。ところで風の動的作用は動的空気力に起因しているが、吊橋に作用する動的空気力を理論的に推定することは、現在のところ、特殊な場合を除いて不可能に近い。ため風洞実験で耐風性の検討を行なっているのが現状であろう。本州四国連絡橋の設計に関しては、耐風設計基準<sup>1)</sup>が規定されていて、吊橋の設計、架設計画段階での耐風性の検証のために風洞実験を実施することを義務づけている。しかしながら、風洞実験は実験室での模型実験であり、実験結果の評価に際しては、実験条件と実橋との相違に留意する必要がある。特に、風洞実験では 2 次元剛体模型を使用した 2 次元風洞実験(バネ支持実験)が実験の容易さと精度管理の面から採用されることが多いが、風洞実験で得られた 2 次元剛体の挙動と、振幅が橋軸方向に変化する実橋の挙動とは自ずと異なったものであることが推測される。また、風洞実験における実験条件の誤差あるいは測定誤差等が実験結果に与える影響はどのようなものであろうか。本研究では、吊橋の耐風性を確認する上で基本となっている 2 次元風洞実験(バネ支持実験)を出発点として、吊橋の耐風性を調査する際の問題点を検討していこうとするものである。以下、本章では従来の研究を整理し、本論文の概要を述べることによって本論文の位置づけを明らかにしようとするものである。

## 1.2 従来の研究

気流中にある構造物の動的な挙動を理論的に推定する場合、構造物の振動特性は、ある程度解析可能であるが、外力としての空気力が一般に未知であるため、結局、風の作用による動的な応答を理論的に解明することは難しくなっている。そのため、構造物の幾何学的寸法と振動特性を実橋に相似させた模型を風洞内に設置して、実風速と対比させた風洞気流を模型に作用させて、その応答を観測する風洞実験が行なわれている。すなわち、構造物の振動特性と空力特性の両者の相似性を兼ね備えた模型を使って風洞実験を実施するもので、2次元模型のバネ支持実験と3次元模型の全体実験が代表的である。この種の風洞実験に関しては、F. B. Farquharson<sup>2)</sup>、C. Scruton<sup>3)</sup>、A. Selberg<sup>4)</sup>、平井<sup>5)</sup>らに始まって多数の研究が現在に至るまで続けられている。

一方、構造物に作用する動的空気力がわかれば振動方程式から構造物の耐風安定性を調べることができることに着目して、動的空気力を検出する試みがいくつかなされている。動的空気力の測定方法として、現在、強制振動法と自由振動法が用いられている。強制振動法は模型を風洞気流中で強制的に加振し、模型に作用する外力から模型の慣性力を引き去り、残りを模型の動的空気力として直接的に検出するものである。強制振動法に関する従来の研究としては、釜口・坂田<sup>6)</sup>、伊藤・田中<sup>7)</sup>、中村・溝田<sup>8)</sup>などが河島の方法を用いて実験的研究を行なっている。さらに最近では、模型の慣性力を天秤 (balance toy) で平衡させて、動的空気力だけを検出しようとする試みが、成田・横山・伊藤<sup>9)</sup>によってなされている。

自由振動法は風洞気流中にバネで支持した模型の振動を観測し、模型の振動数と対数減衰率から動的空気力を間接的に求めるものである。自由振動法は、ねじれ1自由度振動に関して平井<sup>5)</sup>らが若戸吊橋の風洞実験で測定したのが最初で、その後 R. H. Scanlan、Ali Sabzevari<sup>10)</sup>によって、たわみ・ねじれ2自由度振動の場合に拡張されている。自由振動法についてはさらに白石<sup>11)</sup>、中村・溝田<sup>12)</sup>などの研究がなされている。

吊橋のバネ支持実験に関する基準としては、本州四国連絡橋風洞試験基準<sup>1)</sup>がある。この基準では風洞性能、相似則、実験精度、データ整理等について本州四国連絡橋の風洞実験を対象に規定している。この基準によって従来ともすれば恣意的に行なわれていた実験方法に歯止めをかけて、実験精度の均質化を計り、実験結果をある程度規格品として保証したことは注目すべきだと思う。

ところで、バネ支持実験は2次元実験であって振幅が橋軸方向に変化して3次元性を有する実橋の挙動をそのまま再現するとはいえない。その点に関して、白木・福沢・田中・松井<sup>13)</sup>は吊橋架設時を対象にして、また、久保・宮田・伊藤<sup>14)</sup>は動的空気力の非線形性に着目して、バネ支持実験と全体実験の対応性を、強制振動法で測定した動的空気力を介して検討している。

さらに、構造物の耐風性の向上のために、構造物の減衰容量を減衰器によって調整しようとする試みは、倉西・高橋<sup>15)</sup>による粘性ダンパの研究、伊藤・村田<sup>16)</sup>によるジャイロスコーブの研究、

R. L. Wardlaw<sup>17)</sup>, J. E. Snowdon<sup>18)</sup>, 松本・佐藤・西岡・塩尻<sup>19)</sup>等による動的吸振の研究が現在までのところ発表されている。

### 1. 3 本論文の目的と概要

本州四国連絡橋を初め、長大吊橋の動的な耐風応答を検討する際に 2 次元剛体を使用したバネ支持実験が一般的に採用されている。バネ支持実験については、本州四国連絡橋風洞試験基準<sup>1)</sup>においても実験精度、内容等に関して細く規定されていて、風洞試験基準に従う限りにおいて、実験結果の信頼性がある程度保証される。また、2 次元実験であることから、実験が比較的容易で、精度管理もし易い。これらの事柄は、バネ支持実験の有用性を裏付けるものである。しかしながら、バネ支持実験の結果を最終的に風速 ( $V$ ) と振幅 ( $A$ ) と対数減衰率 ( $\delta$ ) の関係として  $V-A-\delta$  曲線に整理した後の活用法が、いまひとつ顧みられていないのが現状のようである。本論文では、バネ支持実験の有用性を高めるために、 $V-A-\delta$  曲線の有機的な活用を試みるものである。 $V-A-\delta$  曲線は、バネ支持実験における振動条件の影響を敏感に反映しているが、本論文では振動条件の影響を分析することによって、振動条件の変化分を  $V-A-\delta$  曲線上で補正する目安を検討する。また、 $V-A-\delta$  曲線を活用してバネ支持実験から実用上十分な精度で非線形動的空気力係数を算出する手法を提案する。動的空気力係数の扱い方にしても、従来は動的空気力係数を風速  $\bar{V}$  の 1 変数関数として扱い、振幅、風の傾斜角、断面形状等については、それらの空気力係数に及ぼす影響を無視することはできないとしていたが、本論文では動的空気力係数を風速、振幅、風の傾斜角、断面形状の多変数関数として考慮する。

周知のように、バネ支持実験は 2 次元実験であり、3 次元性を有する吊橋の耐風応答をどの程度まで評価し得るか問題のあるところである。本論文では非線形動的空気力を受ける 2 次元剛体の耐風応答と 3 次元構造物の耐風応答をそれぞれ検討した後、両者の耐風応答を  $V-A-\delta$  関係において比較するものとする。両者の耐風応答を結びつける手順としては、まず、動的空気力係数を算出し、その動的空気力係数を外力として 2 次元剛体と 3 次元構造物の耐風応答 ( $V-A-\delta$  関係) を再現して両者を比較することにする。動的空気力係数を使って 3 次元構造物の挙動を推定する試みは、すでに幾つかなされているが、それらは、いずれも強制振動実験を新たに行なって動的空気力係数をバネ支持実験とは別に求めている。本論文では、強制振動実験のような特別の実験を行なわないで、2 次元剛体のバネ支持実験から動的空気力係数を抽出し、それから 3 次元構造物の挙動を推定しようとするものである。すなわち、従来の手法では 3 次元構造物の耐風性を検討する際、バネ支持実験の意義が薄れていたが、本論文の手法によれば 2 次元剛体と 3 次元構造物の耐風応答は、動的空気力係数を媒介として関係が直結することになる。

2 次元剛体のバネ支持実験の結果から、動的空気力係数を媒介として 3 次元構造物の耐風性を推

定する手法の適用例として、空気力の非線形性を考慮する場合と気流特性と空力特性が橋軸方向に変化する場合について数値的に検討を加える。

最後に、吊橋の耐風対策の1案として、粘性減衰器と動的吸振器による吊橋の耐風性の向上法について検討する。

なお、本論文の解析において、次の仮定を用いるものとする。

- (1) 動的空気力係数を換算風速と振幅と風の傾斜角さらに構造物の断面形状の多変数関数として多項近似できるものとする。
- (2) 振幅依存性による非線形な動的空気力を受ける吊橋の応答は、非線形振動となるが、解析の対象とする振幅の前後  $N/2$  波 ( $N=1, 2, \dots$ ) の範囲内では、振動系の散逸エネルギーが実際の現象と等価な線形振動として耐風性を検討するものとする。このとき、振動は、前後  $N/2$  波目で振幅が実際の現象と一致し、解析の対象となる領域では一定の減衰率で線形振動することになる。

なお、等価な線形振動の考え方と  $N$  の数値については、対数減衰率の定義と密接な関係にあり、そのことに関しては第2章の補遺に述べる。

- (3) 吊橋の橋軸方向各断面の動的空気力係数は、断面位置における換算風速と振幅と風の傾斜角および構造物の断面形状により決定されるものとする。(ストリップ理論)

なお、斜風の影響は考えないものとする。

- (4) 吊橋の耐風応答解析において、風の乱れの影響を無視するものとする。

## 第 2 章 非線形動的空気力係数の誘導

### 2.1 概 説

吊橋の耐風性の検討に際して、動的空気力係数が既知であるか未知であるかは重要な意味をもっている。例えば、一般に、吊橋などの長大構造物の振動解析は、理論上可能であるので動的空気力係数が既知ならば振動方程式から構造物の耐風応答を理論解析することが可能である。動的空気力係数が未知の場合、構造物の振動特性と空力特性の両者を相似させた風洞実験（バネ支持実験、全体実験）を行なって耐風性を調査することになるが、その際、実験条件あるいは実験方法による実験結果の適用範囲の制約に留意する必要がある。すなわち、実験結果は振動条件の影響を受けているため、振動条件が異なれば新たに風洞実験を実施する必要に迫られることになる。また、吊橋などの長大構造物は、振幅およびその位相が橋軸方向に変化する 3 次元性を有しているが、バネ支持実験のような 2 次元実験で 3 次元性の影響をどの程度追跡できるか疑問とされるところである。すなわち、2 次元実験では、たわみ・ねじれ振動の振幅比と位相が橋軸方向に一定であるという前提条件に基づいているからである。3 次元実験である全体実験は、3 次元性も含めて構造物全体の耐風応答を調査することができて理想的な実験といえるが、バネ支持実験に比べて、実験設備として大型風洞を必要とすることや多大の実験費用と労力を必要とし、さらに実験結果に影響を及ぼす要因が多くて、実験精度の管理に技術を要することが問題点としてあげられる。

一方、動的空気力係数に関しては動的空気力係数を理論的に算出することが、特殊な場合を除いて困難である関係から、実験的に検出する試みがなされている。現在のところ、動的空気力係数の測定法として、強制振動法と自由振動法が用いられているが、その際問題となってくるのは、動的空気力係数をいかに精度よく、また容易に求めることができるかということである。強制振動法は<sup>1)~5)</sup>模型を風洞気流中で強制的に加振し、模型に作用する外力から、模型の慣性力を引き去り、残りを模型の動的空気力として、直接的に検出するもので、原理的には非常にすぐれた面をもっている。

しかしながら、換算風速が低いとか、加振振幅が小さいといった低風速小振幅の場合には、模型の慣性力に比べて、空気力が微小であるため、空気力の検出に技術を要し、また測定精度も落ちてくる。実験に際しては、空気力が振幅に関して非線形であることを考慮して、模型加振は幾種類かの振幅にわたって行う必要がある。一方、自由振動法は、風洞気流中にバネで支持した模型の振動を観測し（すなわち、バネ支持実験）、模型の振動数と対数減衰率から動的空気力を間接的に求めるもので、強制振動法に比べてバネ支持実験装置以外の特別の装置を必要とせず、実験が簡便である。空気力の測定に際しては、検出された空気力より誘導される構造物の振動現象が実際の耐風応答と一致するかどうか確認することが望ましいが、自由振動法の場合、空気力を振動実験から検出



しているの、その確認が容易である。しかも、動的空気力を模型の自由振動から算出する関係上測定精度が実験風速あるいは振幅に制約されることが少ない。また、強制振動法は、定常振動時の空気力を検出していることから、強制振動法で求められる動的空気力は、厳密には、その適用が構造物の限界風速時の定常振動解析に制約される。それに対して、自由振動法では減衰振動を含めて振動現象に即した空気力を求めることができる利点がある。

しかしながら、従来の自由振動法においては、検出される動的空気力係数にばらつきが大きくその値を実用に供するには問題が多い。その主な原因として、たわみ振動とねじれ振動の連成空気力係数を減衰率が零の定常振動時だけから求めようとしていることと、動的空気力係数の振幅に対する変化を系統的に表示していないための影響などが関係しているものと推定される。

そこで、本章では対数減衰率（ $\delta$ ）を、風速（ $V$ ）と振幅（ $A$ ）の関数として図示した  $V-A-\delta$  曲線から、動的空気力係数を風速と振幅の関数として、合理的に算出する方法を提示する。

たわみ振動とねじれ振動の連成空気力係数についても、定常振動時に限定せずに、減衰振動時あるいは発散振動時を含めて連成振動数と対数減衰率および位相差から、連成空気力係数を算出する方法を提案する。

## 2.2 非線形動的空気力係数の表示法<sup>10)</sup>

乱れを含まない気流中における2次元剛体のたわみ・ねじれ2自由度の運動方程式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h) &= L \\ I_\alpha(\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) &= M \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで、 $m$ ：2次元剛体の質量（単位長当り）、 $I_\alpha$ ：2次元剛体の慣性モーメント（単位長当り）、 $h$ ：たわみ変位、 $\alpha$ ：ねじれ変位、 $\zeta_h$ ：たわみ振動の減衰定数、 $\zeta_\alpha$ ：ねじれ振動の減衰定数、 $\omega_h$ ：たわみ振動の固有円振動数、 $\omega_\alpha$ ：ねじれ振動の固有円振動数、また、 $L$ と $M$ はそれぞれ動的揚力と動的空気モーメントで次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho V^2 (2b) C_L \\ M &= \frac{1}{2} \rho V^2 (2b^2) C_M \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ただし、 $\rho$ ：空気密度、 $b$ ：翼弦長（主構間隔）の $1/2$ 、 $V$ ：風速、 $C_L$ ：動的揚力係数、 $C_M$ ：動的空気モーメント係数

次に、 $\bar{h} = h/b$ として運動方程式（2.1）を整理すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{h}} + 2\zeta_h \omega_h \dot{\bar{h}} + \omega_h^2 \bar{h} &= \frac{\omega^2}{\mu} \left( \frac{C_L}{\pi k^2} \right) \\ \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha &= \frac{\omega^2}{\nu} \left( \frac{C_M}{\pi k^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k &= b \omega / V \\ \mu &= m / (\pi \rho b^2) \\ \nu &= I_\alpha / (\pi \rho b^4) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

また、 $\omega$  は連成円振動数である。

動的揚力係数  $C_L$  と動的空力モーメント係数  $C_M$  の表示法 (I) として<sup>3) 10)</sup>

$$\left. \begin{aligned} C_L / (\pi k^2) &= L_h \bar{h} + L_\alpha \alpha = (L_{hR} + i L_{hI}) \bar{h} + (L_{\alpha R} + i L_{\alpha I}) \alpha \\ C_M / (\pi k^2) &= M_h \bar{h} + M_\alpha \alpha = (M_{hR} + i M_{hI}) \bar{h} + (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{h}} + 2\zeta_h \omega_h \dot{\bar{h}} + \omega_h^2 \bar{h} &= \frac{\omega^2}{\mu} [(L_{hR} + i L_{hI}) \bar{h} + (L_{\alpha R} + i L_{\alpha I}) \alpha] \\ \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha &= \frac{\omega^2}{\nu} [(M_{hR} + i M_{hI}) \bar{h} + (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \alpha] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

一方、 $C_L$  と  $C_M$  の表示法 (II) として<sup>6) ~ 8)</sup>

$$\left. \begin{aligned} C_L &= k H_1^* \frac{\dot{\bar{h}}}{V} + k H_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{b} \\ C_M &= k A_1^* \frac{\dot{\bar{h}}}{V} + k A_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + k^2 A_3^* \alpha + k^2 A_4^* \frac{h}{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

とするとき、式 (2.1) (2.2) (2.7) より運動方程式は次のようにまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} m (\ddot{\bar{h}} + 2\zeta_h \omega_h \dot{\bar{h}} + \omega_h^2 \bar{h}) &= \frac{1}{2} \rho V^2 (2b) [k H_1^* \frac{\dot{\bar{h}}}{V} + k H_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + k^2 H_3^* \alpha + k^2 H_4^* \frac{h}{b}] \\ I_\alpha (\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha) &= \frac{1}{2} \rho V^2 (2b^2) [k A_1^* \frac{\dot{\bar{h}}}{V} + k A_2^* \frac{b \dot{\alpha}}{V} + k^2 A_3^* \alpha + k^2 A_4^* \frac{h}{b}] \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

表示法 (I) の動的空気力係数  $L_{hR}$ ,  $L_{hI}$ ,  $L_{\alpha R}$ ,  $L_{\alpha I}$ ,  $M_{hR}$ ,  $M_{hI}$ ,  $M_{\alpha R}$ ,  $M_{\alpha I}$  と表示法 (II) の動的空気力係数  $H_1^*$ ,  $H_2^*$ ,  $H_3^*$ ,  $H_4^*$ ,  $A_1^*$ ,  $A_2^*$ ,  $A_3^*$ ,  $A_4^*$  の間には、次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} H_1^* &= \pi L_{hI} & A_1^* &= \pi M_{hI} \\ H_2^* &= \pi L_{\alpha I} & A_2^* &= \pi M_{\alpha I} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} H_3^* &= \pi L_{\alpha R} + \frac{\delta}{2} L_{\alpha I} & A_3^* &= \pi M_{\alpha R} + \frac{\delta}{2} M_{\alpha I} \\ H_4^* &= \pi L_{h R} + \frac{\delta}{2} L_{h I} & A_4^* &= \pi M_{h R} + \frac{\delta}{2} M_{h I} \end{aligned} \right\}$$

式(2.9)より明らかなように、表示法(Ⅱ)では定常振動の場合( $\delta=0$ )を除いて動的空気力係数に実数部(変位ベクトルの方向)と虚数部が混在している。そこで本論文では、動的空気力係数を実数部と虚数部にはっきりと分離している表示法(Ⅰ)に従うことにする。

また、動的空気力を無次元化する段階において、表示法(Ⅱ)が後で述べるように複雑な無次元化係数の式(2.48)を用いるのに比べて、表示法(Ⅰ)は式(2.6)のように簡明である。

動的空気力係数 $L_h, L_{\alpha}, M_h, M_{\alpha}$ は一般に換算振動数 $k$ の関数と考えられている。例えば Theodorsen<sup>3)</sup>によると気流中で調和振動している単位長の平板断面に作用する動的空気力係数は次式のような<sup>11)</sup>である。

$$\left. \begin{aligned} L_h &= -\frac{2i}{k} C(k) \\ L_{\alpha} &= -\frac{2}{k^2} C(k) - \frac{i}{k} [1 + C(k)] \\ M_h &= \frac{i}{k} C(k) \\ M_{\alpha} &= \frac{1}{k^2} C(k) - \frac{i}{2k} [1 - C(k)] \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\text{ただし, } C(k) = F(k) + iG(k) \quad (2.11)$$

さらに、関係式(2.9)を用いて平板に作用する動的空気力係数を表示法(Ⅱ)で表わしてみる

$$\text{と} \quad \left. \begin{aligned} H_1^* &= -\frac{2\pi}{k} F(k) \\ H_2^* &= -\frac{2\pi}{k^2} G(k) - \frac{\pi}{k} [1 + F(k)] \\ H_3^* &= -\frac{2\pi}{k^2} F(k) + \frac{\pi}{k} G(k) \\ H_4^* &= \frac{2\pi}{k} G(k) \\ A_1^* &= \frac{\pi}{k} F(k) \\ A_2^* &= \frac{\pi}{k^2} G(k) - \frac{\pi}{2k} [1 - F(k)] \\ A_3^* &= \frac{\pi}{k^2} F(k) - \frac{\pi}{2k} G(k) \\ A_4^* &= -\frac{\pi}{k} G(k) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

式(2.12)は<sup>12)</sup>R. H. Scanlan と<sup>13)</sup>白石、浅沼が別々に $H_1^*, H_2^*, H_3^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*$ ( $H_4^*$ と $A_4^*$ を除く)に関して誘導した式と一致している。

ところで、動的空気力係数 $L_h, L_{\alpha}, M_h, M_{\alpha}$ は換算風速 $\bar{V}$ 以外に振幅 $\bar{h}_0$ 、 $\alpha_0$ および風の傾斜角 $\beta$ の非線形な影響を受けており、その効果は決して無視できない。そこで動的空気力係数の

傾斜角 $\beta$ , 換算風速 $\bar{V} (= \pi/k)$  および振幅 $\bar{h}_0$ ,  $\alpha_0$  に関する非線形性を考慮するために動的空気力係数を次式のような多項近似で表示する。

$$L_h = L_{hR} + iL_{hI} = \sum_j a_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} + i \sum_j a_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.13)$$

$$L_\alpha = L_{\alpha R} + iL_{\alpha I} = \sum_j b_{Rj} \alpha_0^{j-1} + i \sum_j b_{Ij} \alpha_0^{j-1} \quad (2.14)$$

$$M_h = M_{hR} + iM_{hI} = \sum_j c_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} + i \sum_j c_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.15)$$

$$M_\alpha = M_{\alpha R} + iM_{\alpha I} = \sum_j d_{Rj} \alpha_0^{j-1} + i \sum_j d_{Ij} \alpha_0^{j-1} \quad (2.16)$$

ただし

$$a_{Rj} = \sum_{\ell} \left( \sum_m a_{Rj\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1}, \quad a_{Ij} = \sum_{\ell} \left( \sum_m a_{Ij\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1} \quad (2.17)$$

$$b_{Rj} = \sum_{\ell} \left( \sum_m b_{Rj\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1}, \quad b_{Ij} = \sum_{\ell} \left( \sum_m b_{Ij\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1} \quad (2.18)$$

$$c_{Rj} = \sum_{\ell} \left( \sum_m c_{Rj\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1}, \quad c_{Ij} = \sum_{\ell} \left( \sum_m c_{Ij\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1} \quad (2.19)$$

$$d_{Rj} = \sum_{\ell} \left( \sum_m d_{Rj\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1}, \quad d_{Ij} = \sum_{\ell} \left( \sum_m d_{Ij\ell m} \beta^{m-1} \right) \bar{V}^{\ell-1} \quad (2.20)$$

さらに動的空気力係数を構造物の形状関数としても考えると、次式のように表現を拡張することが可能である。

$$\left. \begin{aligned} L_{hR} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{Rj\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \bar{h}_0^{j-1} \\ L_{hI} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n a_{Ij\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \bar{h}_0^{j-1} \\ L_{\alpha R} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n b_{Rj\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \alpha_0^{j-1} \\ L_{\alpha I} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n b_{Ij\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \alpha_0^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_{hR} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n c_{Rj\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \bar{h}_0^{j-1} \\
 M_{hI} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n c_{Ij\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \bar{h}_0^{j-1} \\
 M_{\alpha R} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n d_{Rj\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \alpha_0^{j-1} \\
 M_{\alpha I} &= \sum_j \sum_{\ell} \sum_m \sum_n d_{Ij\ell mn} \gamma^{n-1} \beta^{m-1} \bar{V}^{\ell-1} \alpha_0^{j-1}
 \end{aligned} \right\}$$

ここで $\gamma$ は構造物の断面形状， $\beta$ は風の傾斜角， $\bar{V}$ は換算風速， $\bar{h}_0$ はたわみ振幅， $\alpha_0$ はねじれ振幅を表わす。

動的空気力係数の多項近似の例として，線形空気力ではあるが，平板に作用するTheodorsenの動的空気力係数を換算風速 $\bar{V}$ の多項式として表示することを試みる。

Theodorsenの動的空気力係数は，式(2.10)より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{hR} &= \frac{2}{k} G(k) \\
 L_{hI} &= -\frac{2}{k} F(k) \\
 L_{\alpha R} &= -\frac{2}{k^2} F(k) + \frac{1}{k} G(k) \\
 L_{\alpha I} &= -\frac{2}{k^2} G(k) - \frac{1}{k} [1 + F(k)] \\
 M_{hR} &= -\frac{1}{k} G(k) \\
 M_{hI} &= \frac{1}{k} F(k) \\
 M_{\alpha R} &= \frac{1}{k^2} F(k) - \frac{1}{2k} G(k) \\
 M_{\alpha I} &= \frac{1}{k^2} G(k) - \frac{1}{2k} [1 - F(k)]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

ここで， $F(k)$ と $G(k)$ は各々Theodorsen関数の実数部と虚数部で換算振動数 $k$ の関数として表-2.1 および 図-2.1 のように示される。

換算振動数 $k$ と換算風速 $\bar{V}$ の間には，次のような関係が成立する。

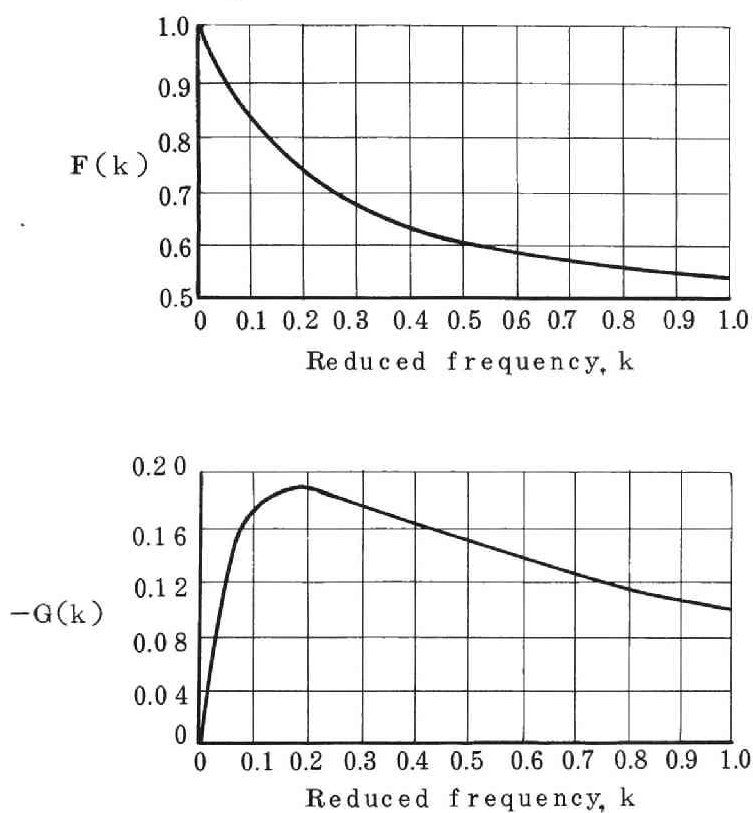


図-2.1 Theodorsen 関数  $C(k) = F + iG$

k	1/k	F	-G
$\infty$	0.000	0.5000	0
100.0	0.100	0.5006	0.0124
60.0	0.16667	0.5017	0.0206
40.0	0.250	0.5037	0.0305
30.0	0.33333	0.5063	0.0400
20.0	0.500	0.5129	0.0577
15.0	0.66667	0.5210	0.0736
12.0	0.83333	0.5300	0.0877
10.0	1.000	0.5394	0.1003
8.0	1.250	0.5541	0.1165
6.6	1.51516	0.5699	0.1308
6.0	1.66667	0.5788	0.1378
5.6	1.78572	0.5857	0.1428
5.0	2.000	0.5979	0.1507
4.4	2.27273	0.6130	0.1592
4.0	2.500	0.6250	0.1650
3.4	2.94118	0.6469	0.1738
3.0	3.33333	0.6650	0.1793
2.4	4.16667	0.6989	0.1862
2.0	5.000	0.7276	0.1886
1.6	6.250	0.7628	0.1876
1.2	8.33333	0.8063	0.1801
1.0	10.000	0.8320	0.1723
0.8	12.500	0.8604	0.1604
0.6	1.666667	0.8920	0.1426
0.5	20.000	0.9090	0.1305
0.4	25.000	0.9267	0.1160
0.25	4.0000	0.9545	0.0872
0.1	100.000	0.9824	0.0482
0	$\infty$	1.000	0

表-2.1 Theodorsen 関数  $C(k) = F + iG$

$$k = \frac{b \omega}{V} = \frac{\pi B N}{V} = \frac{\pi}{\bar{V}} \quad (2.23)$$

ただし、 $B$ ：翼弦長（ $= 2b$ ）， $N$ ：連成振動数（ $= \omega / 2\pi$ ）

式（2.22）で表わされる動的空気力係数を $\bar{V}$ の関数として多項近似すると 表-2.2，表-2.3 のようになる。図-2.2～図-2.9 は Theodorsen 関数の動的空気力係数を 表-2.2 に従って図示したものである。

表－2.2 動的空気力係数（Theodorsen 関数）

LH(R)＝	0.5466D-08	+	-0.1071D-02*V	+	-0.2666D-01*V**2+	0.2454D-02*V**3	
	+ -0.1112D-08*V**4+	0.2058D-05*V**5					
LH(I)＝	-0.2800D-02	+	-0.8080D+00*V	+	-0.9989D-02*V**2+	-0.5618D-08*V**3	
	+ 0.5968D-04*V**4+	-0.1505D-05*V**5					
LA(R)＝	0.2176D-02	+	-0.1014D-01*V	+	-0.1086D+00*V**2+	-0.4359D-02*V**3	
	+ 0.1002D-08*V**4+	-0.8408D-06*V**5					
LA(I)＝	0.2835D-02	+	-0.4888D+00*V	+	0.7861D-02*V**2+	0.4541D-02*V**3	
	+ -0.2669D-08*V**4+	0.5401D-05*V**5					
MH(R)＝	-0.2783D-08	+	0.5857D-08*V	+	0.1888D-01*V**2+	-0.1227D-02*V**3	
	+ 0.5560D-04*V**4+	-0.1029D-05*V**5					
MH(I)＝	0.1150D-02	+	0.1540D+00*V	+	0.4970D-02*V**2+	0.2809D-08*V**3	
	+ -0.2984D-04*V**4+	0.7525D-06*V**5					
MA(R)＝	-0.1088D-02	+	0.5070D-02*V	+	0.5181D-01*V**2+	0.2180D-02*V**3	
	+ -0.5010D-04*V**4+	0.4204D-06*V**5					
MA(I)＝	-0.1417D-02	+	-0.7417D-01*V	+	-0.8980D-02*V**2+	-0.2271D-02*V**3	
	+ 0.1884D-08*V**4+	-0.2701D-05*V**5					

ただし、 $2 \leq \bar{V} \leq 15.7$ （誤差 0.1%以内）

表－2.3 動的空気力係数（Theodorsen 関数）

LH(R)＝	0.1095D-03	+	-0.6037D-01*V	+	-0.8778D-02*V**2+	0.4882D-08*V**3	
	+ -0.8268D-05*V**4+	0.5700D-07*V**5					
LH(I)＝	0.2769D-04	+	-0.2949D+00*V	+	-0.1626D-01*V**2+	0.4457D-08*V**3	
	+ -0.6480D-05*V**4+	0.3812D-07*V**5					
LA(R)＝	-0.2776D-08	+	0.7989D-01*V	+	-0.1254D+00*V**2+	-0.2562D-02*V**3	
	+ 0.4177D-04*V**4+	-0.2654D-06*V**5					
LA(I)＝	0.2044D-08	+	-0.6215D+00*V	+	0.5009D-01*V**2+	-0.4781D-08*V**3	
	+ 0.1852D-06*V**4+	0.2396D-07*V**5					
MH(R)＝	-0.5477D-04	+	0.8019D-01*V	+	0.4389D-02*V**2+	-0.2166D-08*V**3	
	+ 0.4134D-05*V**4+	-0.2850D-07*V**5					
MH(I)＝	-0.1385D-04	+	0.1475D+00*V	+	0.8129D-02*V**2+	-0.2228D-08*V**3	
	+ 0.3240D-05*V**4+	-0.1906D-07*V**5					
MA(R)＝	0.1388D-08	+	-0.3995D-01*V	+	0.6270D-01*V**2+	0.1281D-02*V**3	
	+ -0.2088D-04*V**4+	0.1327D-06*V**5					
MA(I)＝	-0.1022D-08	+	-0.7581D-02*V	+	-0.2505D-01*V**2+	0.2866D-08*V**3	
	+ -0.9887D-07*V**4+	-0.1197D-07*V**5					

ただし、 $15.7 \leq \bar{V} \leq 50$ （誤差 0.6%以内）



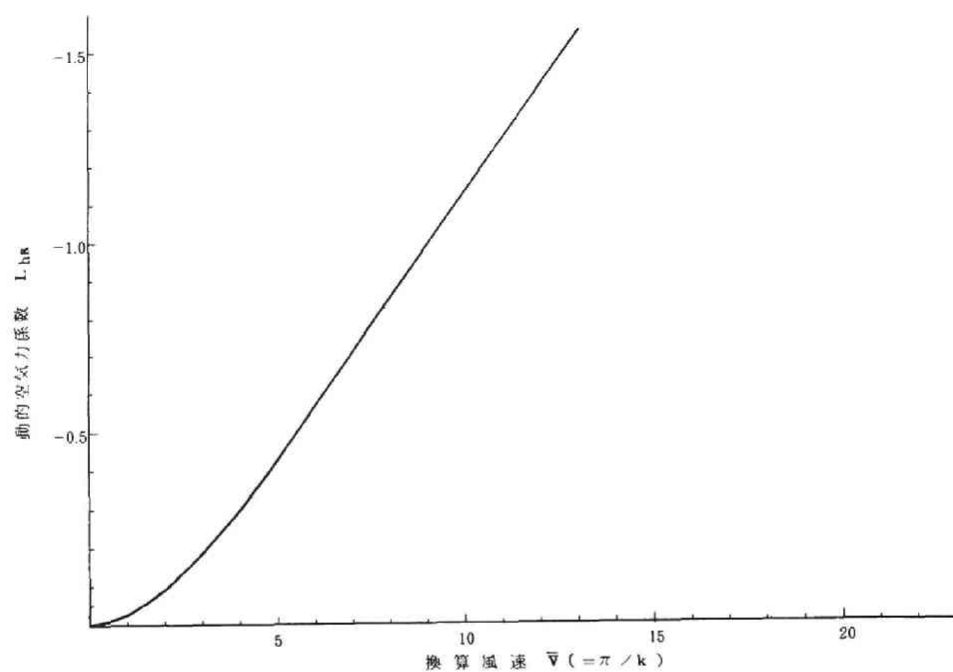


圖-2.2 動的空氣力係數 ( $L_{hR}$ )

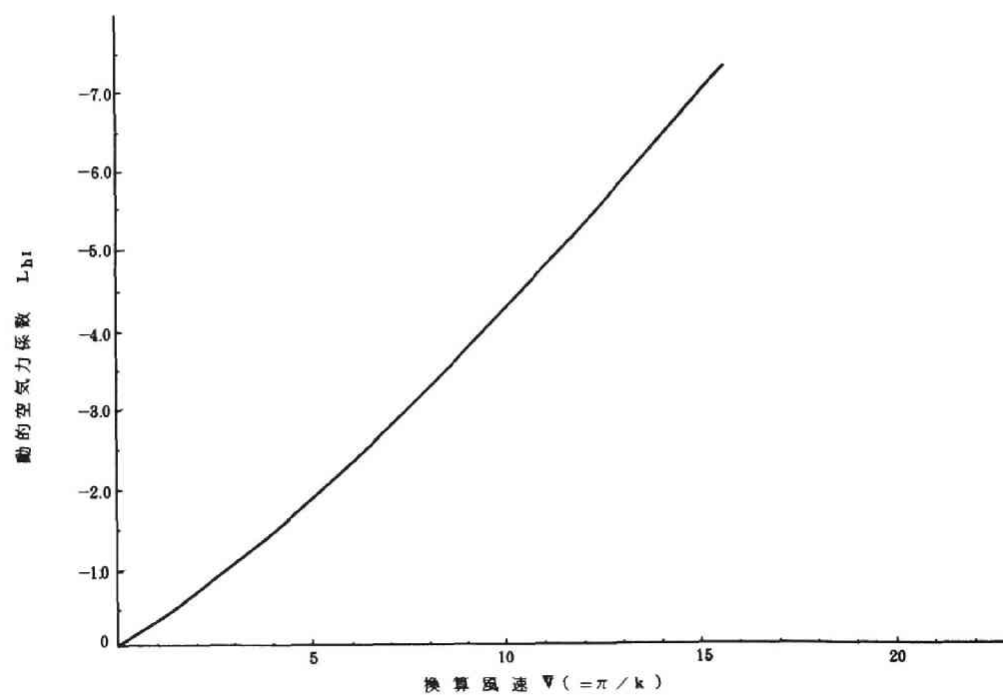


圖-2.3 動的空氣力係數 ( $L_{hI}$ )

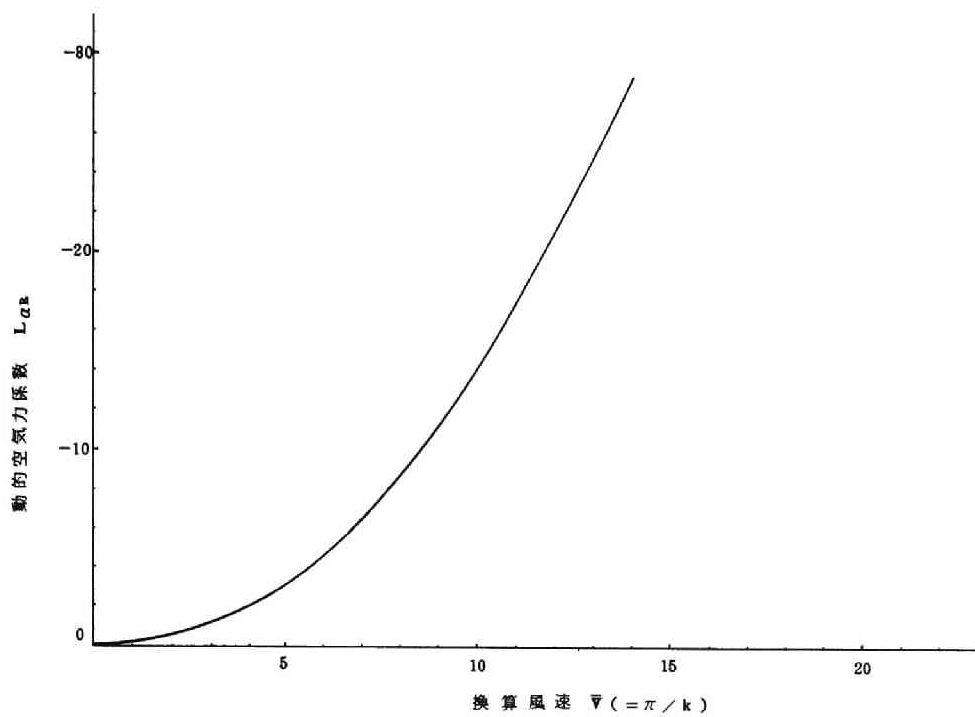


圖-2.4 動的空氣力係數 ( $L_{\alpha R}$ )

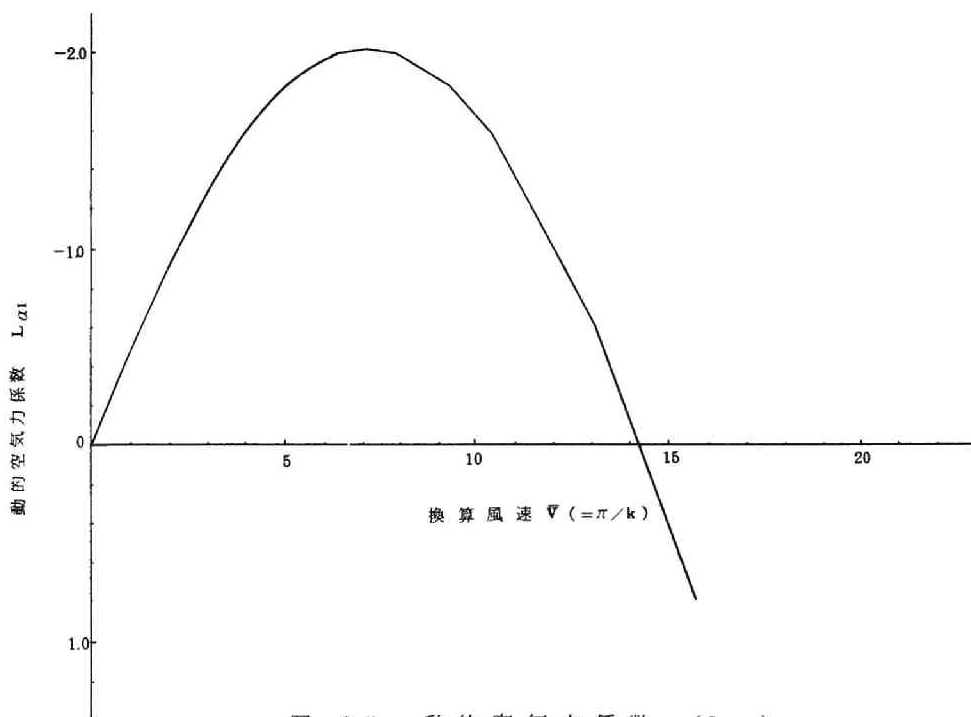


圖-2.5 動的空氣力係數 ( $L_{\alpha I}$ )

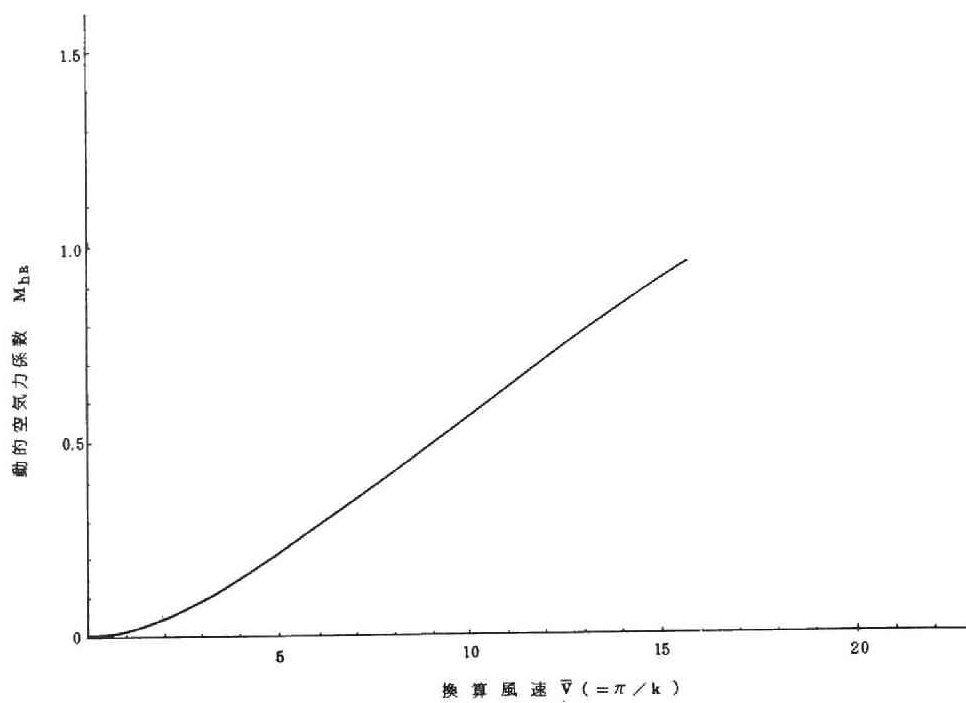


図-2.6 動的空気力係数 ( $M_{hR}$ )

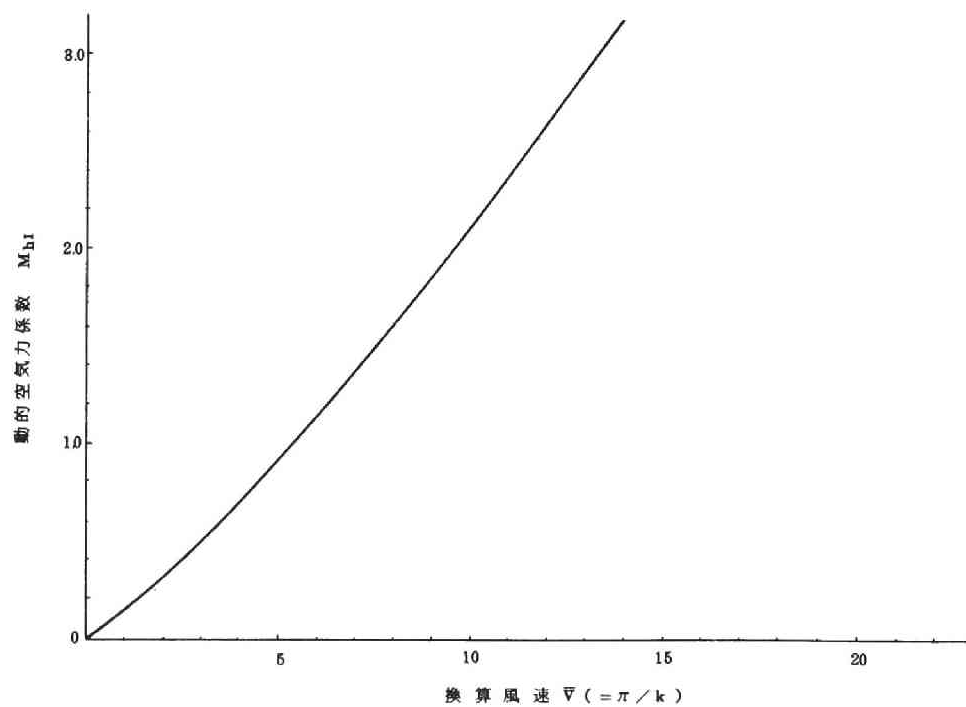


図-2.7 動的空気力係数 ( $M_{hI}$ )

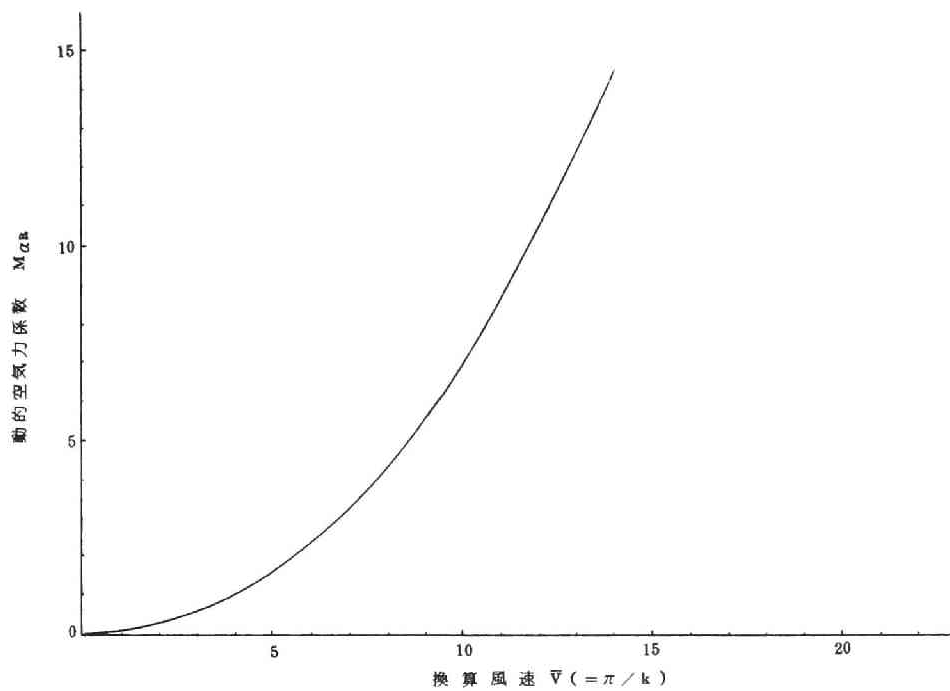


圖-2.8 動的空氣力係數 ( $M_{\alpha_R}$ )

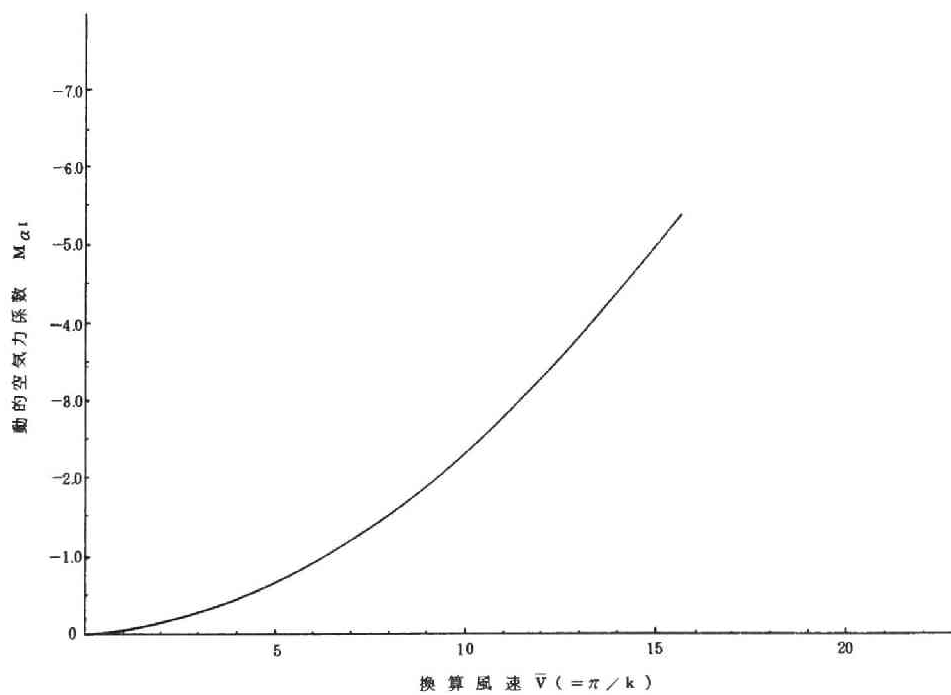


圖-2.9 動的空氣力係數 ( $M_{\alpha_I}$ )

## 2.3 非線形動的空気力係数の算出法<sup>14)</sup>

### (1) ねじれ1自由度 ( $M_\alpha$ )

ねじれ1自由度の場合、式(2.6)は次式のようになる。

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = \frac{\omega_\theta^2}{\nu} M_\alpha \alpha \quad (2.24)$$

ただし、 $\alpha$ ：ねじれ変位、 $\zeta_\alpha$ ：ねじれ振動の減衰定数、 $\omega_\alpha$ ：ねじれ振動の固有円振動数、 $\omega_\theta$ ：ねじれ振動の円振動数、 $\nu = I_\alpha / \pi \rho b^4$ 、 $M_\alpha$ ：動的空気力係数  
式(2.16)より

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = \frac{\omega_\theta^2}{\nu} (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \alpha \quad (2.25)$$

ここで、ねじれ振動の形を次式のように仮定する。

$$\alpha = \alpha_0 e^{(-\delta_\theta / 2\pi + i) \omega_\theta t} \quad (2.26)$$

ただし、 $\alpha_0$ ：ねじれ振幅、 $\delta_\theta$ ：ねじれ振動の対数減衰率、 $\omega_\theta$ ：ねじれ振動の円振動数  
式(2.26)を式(2.25)に代入して、実数部と虚数部に分離し、整理すると

$$M_{\alpha R} = \nu \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta_\theta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) - 1 + \frac{\delta_\theta^2}{4\pi^2} \right] - \sum_j d_{Rj} \alpha_0^{j-1} \quad (2.27)$$

$$M_{\alpha I} = \nu \left[ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) - \frac{\delta_\theta}{\pi} \right] - \sum_j d_{Ij} \alpha_0^{j-1} \quad (2.28)$$

式(2.27)、式(2.28)において振幅 $\alpha_0$ と対数減衰率 $\delta_\theta$ およびねじれ固有円振動数 $\omega_\alpha$ とねじれ円振動数 $\omega_\theta$ の比( $\omega_\alpha / \omega_\theta$ )の関係から、係数 $d_{Rj}$ 、 $d_{Ij}$ を最小自乗法により決定することができる。

すなわち、振幅 $\alpha_0$ に関して非線形な動的空気力の係数 $d_{Rj}$ 、 $d_{Ij}$ をある設定した換算風速 $\bar{V}$ と風の傾斜角 $\beta$ において決定する。その後、 $\bar{V}$ あるいは $\beta$ の異なる実験条件について係数 $d_{Rj}$ 、 $d_{Ij}$ を逐次求めていき、実験条件と係数 $d_{Rj}$ 、 $d_{Ij}$ の組合せが十分な数に達したとき、関係式(2.20)から最小自乗法により係数 $d_{Rj\ell m}$ 、 $d_{Ij\ell m}$ を決定する。

### (2) たわみ1自由度 ( $L_h$ )

たわみ1自由度の場合は、前節のねじれ1自由度のときと同様に考えることができる。すなわち式(2.6)は次のようになる。

$$\ddot{\bar{h}} + 2\zeta_h \omega_h \dot{\bar{h}} + \omega_h^2 \bar{h} = \frac{\omega_z^2}{\mu} [L_{hR} + i L_{hI}] \bar{h} \quad (2.29)$$

ただし、 $\bar{h}$ ：たわみ変位、 $\bar{h} = h/b$ 、 $\zeta_h$ ：たわみ振動の減衰定数、 $\omega_h$ ：たわみ振動の固有円振動数、 $\omega_z$ ：たわみ振動の円振動数、 $\mu = m/\pi \rho b^2$ 、 $L_h = L_{hR} + i L_{hI}$ ：動的空気力係数

ここで、たわみ振動の形を次式のように仮定する。

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e^{(-\delta_z/2\pi + i)\omega_z t} \quad (2.30)$$

ただし、 $\bar{h}_0 = h_0/b$ 、 $h_0$ ：たわみ振幅、 $\delta_z$ ：たわみ振動の対数減衰率、 $\omega_z$ ：たわみ振動の円振動数

式(2.30)を式(2.29)に代入して整理すると

$$L_{hR} = \mu \left[ \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta_z}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - 1 + \frac{\delta_z^2}{4\pi^2} \right] = \sum_j a_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.31)$$

$$L_{hI} = \mu \left[ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - \frac{\delta_z}{\pi} \right] = \sum_j a_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.32)$$

式(2.31)、式(2.32)において、振幅 $\bar{h}_0$ と対数減衰率 $\delta_z$ およびたわみ固有円振動数 $\omega_h$ とたわみ円振動数 $\omega_z$ の比 $(\omega_h/\omega_z)$ の関係から、係数 $a_{Rj}$ 、 $a_{Ij}$ を最小自乗法により決定することができる。さらに、実験条件である換算風速 $\bar{V}$ と風の傾斜角 $\beta$ と係数 $a_{Rj}$ 、 $a_{Ij}$ の組合せから、関係式(2.17)により係数 $a_{Rj\ell m}$ 、 $a_{Ij\ell m}$ が決定される。

(3) たわみ、ねじれ2自由度( $L_\alpha$ 、 $M_h$ )

2次元剛体が、たわみ、ねじれ2自由度で減衰振動するときの振動形を次式で表わす。

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e^{(-\delta/2\pi + i)\omega t} \quad (2.33)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{(-\delta/2\pi + i)\omega t - i\theta} \quad (2.34)$$

ただし、 $\omega$ ：連成円振動数、 $\delta$ ：対数減衰率、 $\theta$ ：たわみ振動とねじれ振動の位相差  
これを式(2.6)に代入する。

$$\begin{bmatrix} (-\delta/2\pi+i)^2\omega^2+2\zeta_h\omega_h(-\delta/2\pi+i)\omega+\omega_h^2-\frac{\omega^2}{\mu}(L_{hR}+iL_{hI})-\frac{\omega^2}{\mu}(L_{\alpha R}+iL_{\alpha I}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu}(M_{hR}+iM_{hI}) \quad (-\delta/2\pi+i)^2\omega^2+2\zeta_\alpha\omega_\alpha(-\delta/2\pi+i)\omega+\omega_\alpha^2-\frac{\omega^2}{\nu}(M_{\alpha R}+iM_{\alpha I}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_0 \\ \alpha_0 e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

このとき

$$L_{\alpha R} = \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) (\tilde{L}_{hR} \cos \theta - \tilde{L}_{hI} \sin \theta) = \sum_j b_{Rj} \alpha_0^{j-1} \quad (2.36)$$

$$L_{\alpha I} = \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) (\tilde{L}_{hR} \sin \theta + \tilde{L}_{hI} \cos \theta) = \sum_j b_{Ij} \alpha_0^{j-1} \quad (2.37)$$

$$M_{hR} = \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) (\tilde{M}_{\alpha R} \cos \theta + \tilde{M}_{\alpha I} \sin \theta) = \sum_j c_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.38)$$

$$M_{hI} = \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) (-\tilde{M}_{\alpha R} \sin \theta + \tilde{M}_{\alpha I} \cos \theta) = \sum_j c_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \quad (2.39)$$

ただし

$$\tilde{L}_{hR} = \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \quad (2.40)$$

$$\tilde{L}_{hI} = 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \quad (2.41)$$

$$\tilde{M}_{\alpha R} = \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \quad (2.42)$$

$$\tilde{M}_{\alpha I} = 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \quad (2.43)$$

したがって、式(2.36)～式(2.43)の関係より、たわみ振幅 $\bar{h}_0$ 、ねじれ振幅 $\alpha_0$ 、たわみ振動とねじれ振動の位相差 $\theta$ 、連成円振動数 $\omega$ 、対数減衰率 $\delta$ および動的空気力係数 $L_{hR}$ 、 $L_{hI}$ 、 $M_{\alpha R}$ 、 $M_{\alpha I}$ の実測値を用いて、最小自乗法により、式(2.36)～式(2.39)の係数 $b_{Rj}$ 、 $b_{Ij}$ 、 $c_{Rj}$ 、 $c_{Ij}$ を決定することができる。その後、換算風速 $\bar{V}$ 、風の傾斜角 $\beta$ と係数 $b_{Rj}$ 、 $b_{Ij}$ 、 $c_{Rj}$ 、 $c_{Ij}$ の組合せから式(2.18)、式(2.19)における係数 $b_{Rj\ell m}$ 、 $b_{Ij\ell m}$ 、 $c_{Rj\ell m}$ 、 $c_{Ij\ell m}$ を算出することができる。

## 2.4 実験誤差の評価<sup>10)</sup>

### 2.4.1 概 説

動的空気力係数は、風洞実験で得られる対数減衰率と振動数およびたわみ振動とねじれ振動の位相差から算出されるが、それらの計測に際しては測定誤差がかならず発生する。この測定誤差が動的空気力係数にどの程度影響するか検討しておくことは、実験から得られる動的空気力係数の信頼性の評価に有益なことと思われる。

ここで、以後の議論の便を使って前節において誘導した動的空気力係数の算出式をまとめて列記する。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{hR} &= \mu \left[ \left( \frac{\omega_h^2}{\omega_z} \right) - \frac{\zeta_h \delta_z}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - 1 + \frac{\delta_z^2}{4\pi^2} \right] \\
 L_{hI} &= \mu \left[ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - \frac{\delta_z}{\pi} \right] \\
 L_{\alpha R} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \right\} \sin \theta \right] \\
 L_{\alpha I} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \right\} \cos \theta \right] \\
 M_{hR} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \right\} \sin \theta \right] \\
 M_{hI} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) \left[ - \left\{ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \right\} \cos \theta \right] \\
 M_{\alpha R} &= \nu \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta_\theta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) - 1 + \frac{\delta_\theta^2}{4\pi^2} \right] \\
 M_{\alpha I} &= \nu \left[ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) - \frac{\delta_\theta}{\pi} \right]
 \end{aligned} \right\} (2.44)$$



#### 2.4.2 対数減衰率の測定誤差

対数減衰率は、動的空気力係数と非常に密接な関係にあり、特に構造物の耐風安定性を左右する空気力係数の虚数部の値を決定している。ここで、たわみ1自由度振動の対数減衰率 $\delta_z$ 、ねじれ1自由度振動の対数減衰率 $\delta_\theta$ 、たわみ・ねじれ2自由度振動の対数減衰率 $\delta$ の測定誤差がそれぞれ $\Delta\delta_z$ 、 $\Delta\delta_\theta$ 、 $\Delta\delta$ ずつあるとして、そのときの動的空気力係数の検出誤差を式(2.44)より求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_{hR} &= \frac{\mu}{\pi} \left[ -\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) + \frac{\delta_z}{2\pi} \right] \Delta\delta_z \\ \Delta L_{hI} &= -\frac{\mu}{\pi} \Delta\delta_z \\ \Delta L_{\alpha R} &= \frac{\mu}{\pi} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ -\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) + \frac{\delta}{2\pi} \right\} \cos\theta + \sin\theta \right] \Delta\delta \\ \Delta L_{\alpha I} &= \frac{\mu}{\pi} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ -\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) + \frac{\delta}{2\pi} \right\} \sin\theta - \cos\theta \right] \Delta\delta \\ \Delta M_{hR} &= \frac{\nu}{\pi} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) \left[ \left\{ -\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) + \frac{\delta}{2\pi} \right\} \cos\theta - \sin\theta \right] \Delta\delta \\ \Delta M_{hI} &= \frac{\nu}{\pi} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) \left[ \left\{ \zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{2\pi} \right\} \sin\theta - \cos\theta \right] \Delta\delta \\ \Delta M_{\alpha R} &= \frac{\nu}{\pi} \left[ -\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) + \frac{\delta_\theta}{2\pi} \right] \Delta\delta_\theta \\ \Delta M_{\alpha I} &= -\frac{\nu}{\pi} \Delta\delta_\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

上式において、空気力係数の虚数部の誤差 $\Delta L_{hI}$ 、 $\Delta M_{\alpha I}$ は各々 $-\frac{\mu}{\pi}$ 、 $-\frac{\nu}{\pi}$ を係数として対数減衰率の誤差 $\Delta\delta_z$ 、 $\Delta\delta_\theta$ に比例しており、対数減衰率の測定精度が空気力係数の虚数部 $L_{hI}$ 、 $M_{\alpha I}$ の精度を支配していることがわかる。

なお、 $L_{hI}$ と $M_{\alpha I}$ 以外の空気力係数では $\Delta\delta_z$ 、 $\Delta\delta_\theta$ 、 $\Delta\delta$ に乗ずる係数に減衰定数 $\zeta$ に相当する次数の項を含んでいるが、吊橋の振動で解析の対象とする振動の減衰定数が一般に数パーセント以下であることを考えると、対数減衰率の測定誤差により $L_{hI}$ と $M_{\alpha I}$ 以外の空気力係数が被る検出精度の低下は $L_{hI}$ と $M_{\alpha I}$ に比べて問題とならなくなる。

### 2.4.3 振動数の測定誤差

振動数の測定誤差は振動数比という形で、動的空気力係数の検出精度を左右している。いま、たわみ固有円振動数 $\omega_h$ 、ねじれ固有円振動数 $\omega_\alpha$ 、たわみ1自由度振動の円振動数 $\omega_z$ 、ねじれ1自由度振動の円振動数 $\omega_\theta$ 、たわみ・ねじれ連成円振動数 $\omega$ の間の振動数比として $(\omega_h/\omega_z)$ 、 $(\omega_\alpha/\omega_\theta)$ 、 $(\omega_h/\omega)$ 、 $(\omega_\alpha/\omega)$ を考える。振動数の測定誤差に起因した振動数比の誤差 $\Delta(\omega_h/\omega_z)$ 、 $\Delta(\omega_\alpha/\omega_\theta)$ 、 $\Delta(\omega_h/\omega)$ 、 $\Delta(\omega_\alpha/\omega)$ が生じたとして、そのときの動的空気力係数の誤差を式(2.44)から求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta L_{hR} &= \mu \left[ 2 \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) \\
 \Delta L_{hI} &= 2 \mu \zeta_h \cdot \Delta \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) \\
 \Delta L_{\alpha R} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ 2 \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \right\} \cos \theta - 2 \zeta_h \sin \theta \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) \\
 \Delta L_{\alpha I} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ 2 \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \right\} \sin \theta + 2 \zeta_h \cos \theta \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) \\
 \Delta M_{hR} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) \left[ \left\{ 2 \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \right\} \cos \theta + 2 \zeta_\alpha \sin \theta \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) \\
 \Delta M_{hI} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) \left[ - \left\{ 2 \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \right\} \sin \theta + 2 \zeta_\alpha \cos \theta \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) \\
 \Delta M_{\alpha R} &= \nu \left[ 2 \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) - \frac{\zeta_\alpha \delta_\theta}{\pi} \right] \cdot \Delta \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right) \\
 \Delta M_{\alpha I} &= 2 \nu \zeta_\alpha \cdot \Delta \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_\theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

式(2.46)において、空気力係数の虚数部の誤差 $\Delta L_{hI}$ と $\Delta M_{\alpha I}$ は振動数比による誤差 $\Delta(\omega_h/\omega_z)$ 、 $\Delta(\omega_\alpha/\omega_\theta)$ の比例係数に減衰定数の項 $\zeta_h$ 、 $\zeta_\alpha$ を乗じているため、振動数比の測定誤差の影響は小さい。

それに対して、空気力係数の実数部の誤差 $\Delta L_{hR}$ 、 $\Delta M_{\alpha R}$ と連成空気力係数の誤差 $\Delta L_{\alpha R}$ 、 $\Delta L_{\alpha I}$ 、 $\Delta M_{hR}$ 、 $\Delta M_{hI}$ は振動数比の測定誤差に対して、 $\mu$ 、 $\nu$ 、 $\mu(\bar{h}_0/\alpha_0)$ 、 $\nu(\alpha_0/\bar{h}_0)$ の次数で比例して大きくなっている。

すなわち、 $L_{hI}$ と $M_{\alpha I}$ 以外の空気力係数の検出精度は振動数比の測定精度と密接な関係にあるといえる。

#### 2.4.4 位相差の測定誤差

たわみ振動とねじれ振動の位相差  $\theta$  が連成空気力係数の計測に際して重要な役割を持っていることは、式(2.4.4)に示すように明らかである。いま、位相差に測定誤差  $\Delta\theta$  があったとすると、空気力係数の誤差は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta L_{\alpha R} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ - \left\{ \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \right\} \cos \theta \right] \Delta\theta = -L_{\alpha I} \cdot \Delta\theta \\
 \Delta L_{\alpha I} &= \mu \left( \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ 2\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \right\} \sin \theta \right] \Delta\theta = L_{\alpha R} \cdot \Delta\theta \\
 \Delta M_{hR} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) \left[ - \left\{ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \right\} \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \right\} \cos \theta \right] \Delta\theta = M_{hI} \cdot \Delta\theta \\
 \Delta M_{hI} &= \nu \left( \frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \right\} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ 2\zeta_\alpha \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \right\} \sin \theta \right] \Delta\theta = -M_{hR} \Delta\theta
 \end{aligned} \right\} (2.47)$$

式(2.47)より明らかのように、位相差の測定誤差は直接に連成空気力係数の測定精度に影響をおよぼし、その程度は、連成空気力係数の大きさにより変化する。

## 2.5 考 察

本章で誘導した動的空気力係数  $L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$  の算定式(2.44)は、自由振動法の立場に立つものであり、すでに R. H. Scanlan と Ali Sabzevari によって提案されている自由振動法による動的空気力係数  $H_1^*, H_2^*, H_3^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*$  の算定式と密接な関係にあるはずである。ここでは、動的空気力係数の算定式(2.44)の妥当性を検討するために両者の関係を考察する。なお、R. H. Scanlan と Ali Sabzevari によると動的空気力係数を次式で表わしている。<sup>6)</sup>

$$\left. \begin{aligned} H_1^* &= \left( \frac{m}{\rho b^2 \omega} \right) H_1 = \left( \frac{m}{\rho b^2 \omega} \right) 2\omega_h (\zeta_h - \zeta_z) \\ H_2^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega} \right) H_2 = \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \sin \theta + (2\zeta_h \omega_h - H_1) \omega \cos \theta] \\ H_3^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega^2} \right) H_3 = \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega^2} \right) \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \cos \theta - (2\zeta_h \omega_h - H_1) \omega \sin \theta] \\ A_1^* &= \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^3 \omega} \right) A_1 = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) [(\omega^2 - \omega_\alpha^2 + A_3) \sin \theta + (2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2) \omega \cos \theta] \\ A_2^* &= \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega} \right) A_2 = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega} \right) (2\zeta_\alpha \omega_\alpha - 2\zeta_\theta \omega_\theta / \sqrt{1 - \zeta_\theta^2}) \\ A_3^* &= \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega^2} \right) A_3 = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega^2} \right) [\omega_\alpha^2 - \omega_\theta^2 / (1 - \zeta_\theta^2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

ただし、 $\omega$  はたわみ・ねじれ連成円振動数、 $\omega_z, \omega_\theta$  は各々たわみ1自由度とねじれ1自由度の円振動数、 $\omega_h, \omega_\alpha$  は各々たわみ1自由度とねじれ1自由度の固有円振動数、 $\zeta_h, \zeta_\alpha$  は各々たわみ1自由度とねじれ1自由度の減衰定数(構造減衰)、 $\zeta_z, \zeta_\theta$  は各々たわみ1自由度とねじれ1自由度の減衰定数(空力減衰と構造減衰の和)である。

さて、動的空気力係数の表示法(I)の  $H_i^*, A_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と表示法(II)による  $L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$  の間には関係式(2.9)が成立する。したがって  $H_i^*, A_i^*$  を式(2.48)の代りに式(2.9)の関係を用いて式(2.44)から表示すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_1^* &= \pi L_h I = \frac{m}{\rho b^2 \omega_z} \left[ 2\zeta_h \omega_h - \frac{\delta_z \omega_z}{\pi} \right] \\ H_2^* &= \pi L_\alpha I = \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [\omega^2 \widetilde{L}_{hR} \sin \theta + \omega^2 \widetilde{L}_{hI} \cos \theta] \\ H_3^* &= \pi L_{\alpha R} + \frac{\delta}{2} L_{\alpha I} = \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega^2} \right) \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [\omega^2 \widetilde{L}_{hR} \cos \theta - \omega^2 \widetilde{L}_{hI} \sin \theta \\ &\quad + \frac{\delta \omega^2}{2\pi} \widetilde{L}_{hR} \sin \theta + \frac{\delta \omega^2}{2\pi} \widetilde{L}_{hI} \cos \theta] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
A_1^* &= \pi M_{hI} = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) [ -\omega^2 \widetilde{M}_{\alpha R} \sin \theta + \omega^2 \widetilde{M}_{\alpha I} \cos \theta ] \\
A_2^* &= \pi M_{\alpha I} = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega \theta} \right) \left[ 2 \zeta_\alpha \omega_\alpha - \frac{\delta \theta \omega \theta}{\pi} \right] \\
A_3^* &= \pi M_{\alpha R} + \frac{\delta}{2} M_{\alpha I} = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega \theta^2} \right) \left[ \omega_\alpha^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta \theta}{\pi} \omega_\alpha \omega \theta - \omega \theta^2 + \frac{\delta \theta^2 \omega \theta^2}{4 \pi^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta \omega \theta}{2 \pi} \left( 2 \zeta_\alpha \omega_\alpha - \frac{\delta \theta \omega \theta}{\pi} \right) \right]
\end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

ただし、 $\omega_z, \delta_z$  は、たわみ 1 自由度の円振動数と対数減衰率であり、 $\omega_\theta, \delta_\theta$  はねじれ 1 自由度の円振動数と対数減衰率で、 $\omega, \delta$  は、たわみ・ねじれ連成振動の円振動数と対数減衰率である。また、 $\widetilde{L}_{hR}, \widetilde{L}_{hI}, \widetilde{M}_{\alpha R}, \widetilde{M}_{\alpha I}$  は、式(2.40)～式(2.43)で表わされる係数である。

いま、たわみ 1 自由度振動において、有風時の円振動数を

$$\omega_z = \omega_h \sqrt{1 - \zeta_z^2}$$

とすると、式(2.49)の第 1 式は次のようになる。

$$H_1^* = \frac{m}{\rho b^2 \omega_z} 2 \omega_h (\zeta_h - \zeta_z) \quad (2.50)$$

$A_3^*$  と  $M_{\alpha R}, M_{\alpha I}$  の関係式として、式(2.49)の第 6 式において

$$\delta = \delta \theta \quad \text{すなわち} \quad A_3^* = \pi M_{\alpha R} + \frac{\delta \theta}{2} M_{\alpha I} \quad (2.51)$$

とすると、式(2.49)の第 6 式は次式のように表示される。

$$A_3^* = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega \theta^2} \right) \left[ \omega_\alpha^2 - \omega \theta^2 - \frac{\zeta_\theta^2 \omega \theta^2}{1 - \zeta_\theta^2} \right] = \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega \theta^2} \right) \left[ \omega_\alpha^2 - \frac{\omega \theta^2}{1 - \zeta_\theta^2} \right] \quad (2.52)$$

また、(2.49)の第 5 式より

$$A_2^* = \frac{I_\alpha}{\rho b^4 \omega \theta} \left[ 2 \zeta_\alpha \omega_\alpha - \frac{2 \zeta_\theta \omega \theta}{\sqrt{1 - \zeta_\theta^2}} \right] \quad (2.53)$$

たわみ・ねじれ連成振動において

$$L_{hR} = 0, \quad \delta = 0$$

とおくとき、式(2.49)の第2式、第3式、第4式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_2^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \sin \theta + (2\zeta_h \omega_h - \frac{\omega}{\mu} L_{hI}) \omega \cos \theta] \\ H_3^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega^2} \right) \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \cos \theta - (2\zeta_h \omega_h - \frac{\omega}{\mu} L_{hI}) \omega \sin \theta] \\ A_1^* &= \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) [(\omega^2 - \omega_\alpha^2 + \frac{\omega^2}{\nu} M_{\alpha R}) \sin \theta + (2\zeta_\alpha \omega_\alpha - \frac{\omega}{\nu} M_{\alpha I}) \omega \cos \theta] \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

ここで、式(2.9)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{\mu} L_{hI} &= \frac{\omega}{\mu} \frac{H_1^*}{\pi} = \frac{\rho b^2 \omega}{m} H_1^* = H_1 \\ \frac{\omega^2}{\nu} M_{\alpha R} &= \frac{\omega^2}{\nu} \frac{A_3^*}{\pi} = \frac{\rho b^4 \omega^2}{I_\alpha} A_3^* = A_3 \\ \frac{\omega}{\nu} M_{\alpha I} &= \frac{\omega}{\nu} \frac{A_2^*}{\pi} = \frac{\rho b^4 \omega}{I_\alpha} A_2^* = A_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

の関係を用いると、式(2.54)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_2^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \sin \theta + (2\zeta_h \omega_h - H_1) \omega \cos \theta] \\ H_3^* &= \left( \frac{m}{\rho b^3 \omega^2} \right) \left( \frac{h_0}{\alpha_0} \right) [(\omega_h^2 - \omega^2) \cos \theta - (2\zeta_h \omega_h - H_1) \omega \sin \theta] \\ A_1^* &= \left( \frac{I_\alpha}{\rho b^3 \omega} \right) \frac{1}{\omega} \left( \frac{\alpha_0}{h_0} \right) [(\omega^2 - \omega_\alpha^2 + A_3) \sin \theta + (2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2) \omega \cos \theta] \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

R. H. Scanlan と Ali Sabzevari の式(2.48)に対応すると式として、式(2.50)～式(2.56)が誘導されたが、さらに  $H_1^*$ 、 $A_2^*$ 、 $A_3^*$  の無次元化係数  $(m/\rho b^2 \omega_z)$ 、 $(I_\alpha/\rho b^4 \omega \theta)$ 、 $(I_\alpha/\rho b^4 \omega_\theta^2)$  におけるたわみ1自由度のときの円振動数  $\omega_z$  とねじれ1自由度の円振動数  $\omega_\theta$  およびたわみ・ねじれ2自由度の円振動数  $\omega$  の区別を無視すると、式(2.48)と式(2.50)～式(2.56)は全く一致する。

したがって、R. H. Scanlan と Ali Sabzevari の式(2.48)にはすでに述べてきたように、次の仮定が含まれているといえる。

- ① たわみ・ねじれ連成振動における対数減衰率  $\delta$  は0として連成空気力係数を算出する。  
(定常振動を対象として連成空気力係数を算出する)
- ② 揚力のたわみ変位成分  $L_{hR}$  は無視する。

$$\textcircled{3} \quad A_3^* = \pi M_{\alpha R} + \frac{\delta \theta}{2} M_{\alpha I} \quad \text{とする。}$$

$$(\text{本来の正しい関係は } A_3^* = \pi M_{\alpha R} + \frac{\delta}{2} M_{\alpha I})$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{m}{\rho b^2 \omega_z} = \frac{m}{\rho b^2 \omega}, \quad \frac{I_{\alpha}}{\rho b^4 \omega \theta} = \frac{I_{\alpha}}{\rho b^4 \omega}, \quad \frac{I_{\alpha}}{\rho b^4 \omega \theta^2} = \frac{I_{\alpha}}{\rho b^4 \omega^2} \quad \text{とする。}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{たわみ 1 自由度振動において, } \omega_z = \omega_h \sqrt{1 - \zeta_z^2} \quad \text{とする。}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{本来の正しい関係は} \\ \omega_z = \omega_h \sqrt{(1 - \zeta_h^2) / (\frac{1}{\mu} L_{hR} - \frac{1}{4\mu^2} L_{hI}^2 + 1)} \end{array} \right)$$

以上の仮定は, R. H. Scanlan と Ali Sabzevari が式(2.48)を得るに際して立てた基本式と誘導過程からも見いだすことができる。

## 2.6 結 言

本章では, 動的空気力係数の表示法として, 実数部と虚数部に分離した表示法(I)と, 変位成分と速度成分に分離した表示法(II)について相互の関係を整理した後, 動的空気力係数の表現がより整理されていると思われる表示法(I)を採用することを述べた。

また, 換算風速以外に, 振幅と風の傾斜角さらに断面形状等の非線形な影響を受けている動的空気力係数の非線形性を考慮するために, それら非線形要因の多変数関数としての表現法について記述した。その後, 動的空気力係数の算出式を, 表示法(I)に即して実数部と虚数部に分離し, また定常振動を含めた減衰振動(または発散振動)を対象として誘導した。本論文の手法によれば, 動的空気力係数は, 対数減衰率と振動数および位相差から算出されるが, それらは風洞実験における計測値であって実験誤差が含まれている。そこで, 動的空気力係数の信頼性を評価するために, 実験誤差の影響について検討した。さらに, 本論文における動的空気力係数の算定式の妥当性を考察するために, R. H. Scanlan と Ali Sabzevari の式と比較検討した。以上の結果, 次のことが明らかとなった。

(1) 動的空気力係数の表示法として, 実数部と虚数部に分離した表示法(I)と変位成分と速度成分に分離した表示法(II)が一般に用いられているが, 両者の関係は式(2.9)のように整理される。表示法(I)の方が, 表示法(II)に比べて動的空気力の無次元化表示が簡明であり, また, 実数部と虚数部にはっきりと分離されているので, 動的空気力係数の表示法として, より優れているものと判断される。

(2) Theodorsen 関数の動的空気力係数を関係式(2.9)に基づいて表示法(I)と(II)で整理し, 従

来の Theodorsen 空気力係数の関係式と一致することを確認した。動的空気力係数を換算風速の多項式として表現することの例として、Theodorsen 空気力係数の式を表-2.2、表-2.3のように多項近似してみたが、その精度は誤差0.6%以内であり、実用上充分なものと思われる。

(3) 動的空気力係数を換算風速と振幅と風の傾斜角と断面形状の関数として最小自乗法により多項近似することができるがこの手法をさらに拡張して、動的空気力係数に影響を与える諸要因の多変数関数として一般化することも考えられる。

(4) たわみ、または、ねじれ1自由度振動の場合、非線形動的空気力係数は、すでに2.3で述べているように換算風速と振幅と対数減衰率および振動数の関係から算出される。そのうち振動数を除いて、換算風速と振幅と対数減衰率の関係は、一般に  $V-A-\delta$  曲線として図示されている。

$V-A-\delta$  曲線に関して、特に本州四国連絡橋・風洞試験基準では、風洞実験結果を  $V-A-\delta$  曲線上に整理することを規定している。したがって本論文の手法を  $V-A-\delta$  曲線と結びつけるとき、現在の風洞実験手順の延長として、非線形動的空気力係数を比較的容易に算定することができる。

(5) 本論文の手法によれば、たわみ・ねじれ2自由度の連成空気力係数を定常振動時だけでなく、減衰、発散振動時も含めた任意の振動状態で算出することができる。

(6) 動的空気力係数の算出に際しては、対数減衰率の測定精度が空気力係数  $L_{hi}$  と  $M_{\alpha i}$  の精度を左右し、振動数比の測定精度が  $L_{hi}$  と  $M_{\alpha i}$  以外の空気力係数の精度と密接な関係にある。さらに、連成空気力係数において、たわみ振動とねじれ振動の位相差が、定常振動時だけでなく減衰振動時にも重要な因子となる。

(7) 本論文と同様に自由振動法の立場から動的空気力係数の算出法を提案した R. H. Scanlan と Ali Sabzevari の式には2.5考察で述べたような仮定が含まれており、本論文の算定式がより一般的な表現であると思われる。

(8) 従来、3次元構造物の耐風性の検討に際して全体実験、または強制振動法による動的空気力係数が用いられており、2次元剛体模型のパネ支持実験の結果が検証実験のわくを越えて、有効に利用されることは少なかったように見うけられる。それが本論文の手法によれば、パネ支持実験からも動的空気力係数を換算風速および振幅の関数として実用上精度良く検出することができ、その結果、3次元構造物の耐風性を調べることへの展望を開くことができる。

#### 【補遺】対数減衰率の定義<sup>15)</sup>

粘性減衰のある自由振動の式は、一般に次式で表わされる。

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta\omega_{\alpha}\dot{\alpha} + \omega_{\alpha}^2\alpha = 0 \quad (2.57)$$

上式の解は、



$$\alpha = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \theta) \quad (2.58)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\alpha_s^2 + (\dot{\alpha}_s + \zeta \omega \alpha_s)^2 / \omega^2}, & \lambda &= \omega \delta / (2\pi) \\ \omega &= \omega_\alpha \sqrt{1 - \zeta^2} \quad, & \tan \theta &= (\dot{\alpha}_s + \zeta \omega \alpha_s) / (\omega \alpha_s) \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

$\alpha_s, \dot{\alpha}_s$  :  $t = 0$  のときの変位および速度

式(2.58)より明らかなように, 変位の極大値(振幅) $\alpha_0$ は曲線  $Ae^{-\lambda t}$  上に位置して

$$\bar{\varphi}(t) = Ae^{-\lambda t} \quad (2.60)$$

とおくとき,  $\bar{\varphi}(t)$  は振幅  $\alpha_0$  の包絡線とみなすことができる。

一方, 変位が極大値  $\alpha_0$  をもつときの振動系のエネルギーは, 系のポテンシャルエネルギーに等しいとみなすことができる。すなわち,

$$W = \frac{1}{2} k \alpha_0^2 \quad (2.61)$$

ただし,

$W$  : 1 サイクル中の最大ポテンシャルエネルギー

$k$  : 振動系のばね定数

時刻  $t_1$  において, 変位が極大値  $\alpha_{01}$  となり, 1 サイクル後の時刻  $t_2$  に極大値  $\alpha_{02}$  となると, 振動系が 1 サイクル中に散逸するエネルギーは,

$$\Delta W = \frac{1}{2} k (\alpha_{01}^2 - \alpha_{02}^2) \quad (2.62)$$

ところで, 変位が極大となる振幅の値は, 式(2.59)に示すように初期条件  $\alpha_s, \dot{\alpha}_s$  のいかんにより, 曲線式(2.60)上の任意の点にとることができる。そこで, 式(2.62)において, 振幅  $\alpha_0$  の代りに, 包絡線  $\bar{\varphi}(t)$  を考慮すると

$$\Delta W = \frac{1}{2} k \{ \bar{\varphi}^2(t_1) - \bar{\varphi}^2(t_2) \} \quad (2.63)$$

ここで, 振動系のエネルギー散逸の割合を示すパラメーターとして, 次式で定義される減衰容量

Ψを導入する。

$$\Psi = \Delta W / W = 1 - \{ \bar{\phi}(t_2) / \bar{\phi}(t_1) \}^2 \quad (2.64)$$

また、対数減衰率の定義を  $\delta \bar{\phi}(t)$  を用いて表示すると次のようになる。

$$\delta \bar{\phi} = \log_e \{ \alpha_{01} / \alpha_{02} \} = \log_e \{ \bar{\phi}(t_1) / \bar{\phi}(t_2) \} \quad (2.65)$$

式(2.64)，式(2.65)より，

$$\Psi = 1 - e^{-2\delta \bar{\phi}} \quad (2.66)$$

上式は、対数減衰率  $\delta \bar{\phi}$  と減衰容量 Ψ の関係式である。

さて、対数減衰率の示標を新たに次式で定義する。

$$\gamma = - \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ \log_e \bar{\phi}(t) \} \quad (2.67)$$

式(2.67)で定義される減衰容量の示標 γ と減衰容量 Ψ の間の間には、時刻  $t_0$  の前後  $1/2$  サイクルを考えると、従来の対数減衰率の場合と同様の関係が成立する。すなわち、式(2.67)を  $(t_0 - \pi/\omega)$  から  $(t_0 + \pi/\omega)$  まで積分すると

$$\gamma = \log_e \{ \bar{\phi}(t_0 - \frac{\pi}{\omega}) / \bar{\phi}(t_0 + \frac{\pi}{\omega}) \} \quad (2.68)$$

一方、減衰容量は式(2.64)と同様にして、

$$\Psi = 1 - \{ \bar{\phi}(t_0 + \frac{\pi}{\omega}) / \bar{\phi}(t_0 - \frac{\pi}{\omega}) \}^2 \quad (2.69)$$

式(2.68)，式(2.69)より，

$$\Psi = 1 - e^{-2\gamma} \quad (2.70)$$

ただし、上式の計算において、対数減衰率の示標 γ と円振動数 ω は、時間 t に関して一定であるとしている。

したがって、対数減衰率の示標 γ は、式(2.66)と式(2.70)より明らかなように、その定義される時刻  $t_0$  の前後  $1/2$  サイクルの間で振動が線形であるとするとき、その区間で定義される対数減衰率  $\delta \bar{\phi}$  と一致する。

次に、Nサイクル中の全散逸エネルギーに着目して  $\Psi_N$  をNサイクル中の全散逸エネルギーとNサイクル中の最大ポテンシャルエネルギーの比と定義すると、次式が成立する。(ただし、 $N=1, 2, \dots$ )

CASE1,  $\gamma$  が時間  $t$  に関して一定値  $\tilde{\gamma}$  である場合

$$\begin{aligned}\Psi_N &= 1 - \left\{ \bar{\phi}(t + N\pi/\omega) / \bar{\phi}(t - N\pi/\omega) \right\}^2 \\ &= 1 - e^{-2N\tilde{\gamma}}\end{aligned}\quad (2.71)$$

CASE2,  $\gamma$  の時間的変化を考慮する場合

$$\begin{aligned}\Psi_N &= 1 - \left\{ \bar{\phi}(t + N\pi/\omega) / \bar{\phi}(t - N\pi/\omega) \right\}^2 \\ &= 1 - e^{-\frac{\omega}{\pi} \int_{t_0 - N\pi/\omega}^{t_0 + N\pi/\omega} \gamma dt}\end{aligned}\quad (2.72)$$

式(2.71)と式(2.72)の関係より

$$\tilde{\gamma} = \frac{\omega}{2N\pi} \int_{t_0 - N\pi/\omega}^{t_0 + N\pi/\omega} \gamma dt \quad (2.73)$$

すなわち、対数減衰率の示標  $\gamma$  が時間に関して一定値  $\tilde{\gamma}$  であるとする場合、その値を  $\gamma$  のNサイクル当りの時間平均値にとれば対象とするNサイクル中の全散逸エネルギーに関して等価となる。また、式(2.67)と式(2.73)より、全散逸エネルギーが等価な対数減衰率の示標  $\tilde{\gamma}$  は次式で与えられる。

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{N} \log_e \left\{ \bar{\phi}(t_0 - N\pi/\omega) / \bar{\phi}(t_0 + N\pi/\omega) \right\} \quad (2.74)$$

上式は時刻  $t_0$  の前後  $N/2$  サイクルの間で線形振動する系の対数減衰率  $\delta_{\bar{\phi}}$  と一致している。すなわち、

$$\delta_{\bar{\phi}} = \frac{1}{N} \log_e \left\{ \bar{\phi}(t_0 - N\pi/\omega) / \bar{\phi}(t_0 + N\pi/\omega) \right\} = \tilde{\gamma} \quad (2.75)$$

したがって、解析の対象とする振幅の前後  $N/2$  波目の振幅を実際の振幅  $\bar{\phi}(t - N\pi/\omega)$  と  $\bar{\phi}(t + N\pi/\omega)$  に一致させて式(2.75)から対数減衰率  $\delta_{\bar{\phi}}$  を算定するとき、前後  $N/2$  波の範囲内では、振動系の散逸エネルギーが実際の現象と等価な線形振動として耐風性を検討できることになる。

## 第 3 章 非線形動的空気力を受ける 2 次元剛体の耐風応答

### 3.1 概 説

第 2 章では吊橋等の構造物に作用する非線形動的空気力係数の算出法を整理したが、本章では 2 次元流中で非線形動的空気力を受けて振動する 2 次元剛体の耐風応答について検討する。非線形な動的空気力を受ける 2 次元剛体の応答は非線形振動となるが 1.3 の仮定(2)で述べているように散逸エネルギーが等価な線形振動として解析するものとする。

3 次元構造物の耐風性を 2 次元剛体の振動問題に還元して扱う考え方は、実験的には、バネ支持実験、理論的には Bleich の理論、Selberg の式などにみることができる。本章では振動モードを考慮した 3 次元構造物の応答解析の前段階として、2 次元剛体の応答特性を検討する。また、風洞<sup>1)</sup>での代表的な 2 次元振動実験としてバネ支持実験があるが、現在の本州四国連絡橋・風洞試験基準<sup>1)</sup>でも、バネ支持実験は、耐風設計上重要な位置を与えられている。バネ支持実験では、風洞内で対象とする構造物の空力特性と振動特性の両者を相似させているので、実験結果には振動条件の影響が入っている。したがって、風洞実験における振動条件の設定誤差をどのように評価すべきか、あるいは異なる振動条件のもとでの耐風性はどうなるのか考慮を要するところである。そこで本章では、振動条件が 2 次元剛体の耐風応答におよぼす影響について検討する。

ところで、バネ支持実験では一般に供試体をたわみ・ねじれ 2 自由度で支持しているが実験結果を  $V-A-\delta$  曲線として整理する段階ではたわみ振動とねじれ振動のそれぞれについて個別にデータ解析している。本章では、たわみ・ねじれ 2 自由度振動を振動 1 自由度として扱う際の理論的裏付けを、特に、ねじれ振動を対象に行う。たわみ・ねじれ 2 自由度振動の連成空気力係数については、すでに、その算出法を 2.3 で述べているが、本章では、さらに、測定誤差の入り易い位相差によらないで連成空気力係数を求める簡便法を提案する。

### 3.2 2 次元剛体の耐風応答<sup>2)</sup>

#### 3.2.1 ねじれ 1 自由度

2 次元剛体が乱れを含まない気流中でねじれ 1 自由度の振動をするとき、その運動方程式は式 (2.6) より次のように表わせる。

$$\ddot{\alpha} + 2 \zeta_{\alpha} \omega_{\alpha} \dot{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \alpha = \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu} [M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}] \alpha \quad (3.1)$$

ここで、ねじれ振動の形を

$$\alpha = \alpha_0 e^{(-\delta\theta/2\pi + i)\omega_{\theta} t} \quad (3.2)$$

とするとき、気流中における 2 次元剛体の対数減衰率  $\delta\theta$  と円振動数  $\omega_{\theta}$  は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\theta} &= 2\pi \zeta_{\alpha} \left( \frac{\omega_{\alpha}}{\omega_{\theta}} \right) - \frac{\pi}{\nu} M_{\alpha I} \\ \omega_{\theta} &= \omega_{\alpha} \sqrt{ (1 - \zeta_{\alpha}^2) / \left( \frac{1}{\nu} M_{\alpha R} - \frac{1}{4\nu^2} M_{\alpha I}^2 + 1 \right) } \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

上式において、 $M_{\alpha R} = M_{\alpha I} = 0$  とするとき

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\theta} &= 2\pi \zeta_{\alpha} / \sqrt{1 - \zeta_{\alpha}^2} \\ \omega_{\theta} &= \omega_{\alpha} \sqrt{1 - \zeta_{\alpha}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

式(3.4)の第1式は空気力が作用しないときの対数減衰率  $\delta_{\theta}$  と減衰定数  $\zeta_{\alpha}$  の関係であり、第2式は円振動数  $\omega_{\theta}$  と固有円振動数  $\omega_{\alpha}$  の関係に一致している。<sup>10)</sup>

式(3.3)における空気力係数  $M_{\alpha R}$ 、 $M_{\alpha I}$  は式(2.16)に示すように風速と振幅の関数であり、任意の風速と振幅の組合せに対して対数減衰率  $\delta_{\theta}$  と円振動数  $\omega_{\theta}$  を算定することができる。

次に、振動が成長して、ある振幅に達するまでの時間は、最小自乗法を使えば次のように容易に求めることができる。<sup>2)3)4)</sup>

すなわち、対数減衰率  $\delta_{\theta}$  と振幅  $\alpha_0$  の関係を次式のように仮定し、係数  $A_j$  を最小自乗法により決定する。

$$\delta(\alpha_0) = \sum_j A_j \alpha_0^{j-1} \quad (3.5)$$

また、対数減衰率は定義式より次のように表示される。

$$\delta(\alpha_0) = \frac{1}{2} \log_e \frac{\alpha_{0-1}}{\alpha_{0+1}} \quad (3.6)$$

ただし、 $\alpha_{0-1}$  ; 振幅  $\alpha_0$  の1サイクル前の振幅

$\alpha_{0+1}$  ; 振幅  $\alpha_0$  の1サイクル後の振幅

ここで

$$P(\alpha_0) = \alpha_{0-1} / \alpha_{0+1} \quad (3.7)$$

とおけば

$$P(\alpha_0) = e^{2\delta(\alpha_0)} \quad (3.8)$$

このとき

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0+2} &= \alpha_0 / P(\alpha_{0+1}) \\
 \alpha_{0+3} &= \alpha_{0+1} / P(\alpha_{0+2}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \alpha_{0+2N} &= \alpha_0 / \{ P(\alpha_{0+1}) P(\alpha_{0+3}) \dots\dots P(\alpha_{0+2N-1}) \} \\
 \alpha_{0+2N+1} &= \alpha_{0+1} / \{ P(\alpha_{0+2}) P(\alpha_{0+4}) \dots\dots P(\alpha_{0+2N}) \}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0+j} &: \text{振幅 } \alpha_0 \text{ の } j \text{ サイクル後の振幅} \\
 P(\alpha_{0+j}) &= \exp[2\delta(\alpha_{0+j})] \\
 \delta(\alpha_{0+j}) &: \text{振幅 } \alpha_{0+j} \text{ のときの対数減衰率}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

関係式(3.5)より振幅  $\alpha_{0+j}$  のときの対数減衰率  $\delta(\alpha_{0+j})$  を算定し、式(3.9)を用いて波数  $N$  と振幅  $\alpha_{0+N}$  の組み合わせを十分な数だけ計算する。その結果を次式に代入して、係数  $B_j$  を最小自乗法により決定する。

$$N = \sum_j B_j \{ \log_e(\alpha_{0+N}) \}^{j-1} \tag{3.11}$$

一方、振動周期は、式(3.3)より次のようになる。

$$\begin{aligned}
 t_j &= 2\pi / \omega_j \\
 &= \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \sqrt{ \left( \frac{1}{\nu} M_{\alpha R} - \frac{1}{4\nu^2} M_{\alpha I}^2 + 1 \right) / (1 - \zeta_\alpha^2) }
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 t_j &: \text{振幅 } \alpha_{0+j} \text{ のときの振動周期} \\
 \omega_j &: \text{振幅 } \alpha_{0+j} \text{ のときの円振動数}
 \end{aligned}$$

このとき、振動が成長して振幅が  $\alpha_{0+N1}$  から  $\alpha_{0+N2}$  に達するまでに要する時間は

$$T = \sum_{j=N1}^{N2-1} t_j \tag{3.13}$$

上式における波数  $N1$ ,  $N2$  と周期  $t_j$  は、式(3.11)と式(3.12)から決定される。

以上の手続は、対象とする  $\alpha_{0+j}$  の範囲内で  $\delta(\alpha_{0+j})$  が同符号の場合を対象としている。 $\delta(\alpha_{0+j})$  の符号が  $\alpha_{0+j}$  により正負移り変わるときは  $\delta(\alpha_{0+j})$  が同符号となる  $\alpha_{0+j}$  の領域に限って式(3.13)が適用できることに注意を要する。

### 3.2.2 たわみ1自由度

2次元剛体が乱れを含まない気流中で、たわみ1自由度の振動をする場合は、前節のねじれ1自由度のときと同様に考えることができて、その運動方程式は式(2.6)より次式のようなである。

$$\ddot{\bar{h}} + 2\zeta_h \omega_h \dot{\bar{h}} + \omega_h^2 \bar{h} = \frac{\omega^2}{\mu} [L_{hR} + i L_{hI}] \bar{h} \quad (3.14)$$

ここで、たわみ振動の形を次式で表わす。

$$\bar{h} = h_0 e^{-(\delta_h/2\pi + i) \omega_h t} \quad (3.15)$$

このとき、2次元剛体の対数減衰率 $\delta_z$ と円振動数 $\omega_z$ は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_z &= 2\pi\zeta_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_z} \right) - \frac{\pi}{\mu} L_{hI} \\ \omega_z &= \omega_h \sqrt{(1 - \zeta_h^2) / \left( \frac{1}{\mu} L_{hR} - \frac{1}{4\mu^2} L_{hI}^2 + 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

上式において空気力係数 $L_{hR}$ 、 $L_{hI}$ は風速と振幅の関数であり、任意の風速と振幅の組合せに対して対数減衰率 $\delta_z$ と円振動数 $\omega_z$ を算定することができる。

また、2次元剛体に空気力が作用しないで自由減衰振動するときは、式(3.16)において

$L_{hR} = L_{hI} = 0$  として、

$$\left. \begin{aligned} \delta_z &= 2\pi\zeta_h / \sqrt{1 - \zeta_h^2} \\ \omega_z &= \omega_h \sqrt{1 - \zeta_h^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

### 3.2.3 たわみ・ねじれ2自由度

2次元剛体がたわみ・ねじれ2自由度で連成振動している場合、その振動形を次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \bar{h} &= \bar{h}_0 e^{z t} \\ \alpha &= \alpha_0 e^{z t} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\text{ただし、} \quad z = \left( -\frac{\delta}{2\pi} + i \right) \omega \quad (3.19)$$

これを式(2.6)に代入する。

$$\begin{bmatrix} Z^2 + 2\zeta_h \omega_h Z + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + i L_{hI}) & -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{\alpha R} + i L_{\alpha I}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + i M_{hI}) & Z^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha Z + \omega_\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

上式において $\bar{h}$ と $\alpha$ が有意な解を有するための条件は

$$\begin{vmatrix} Z^2 + 2\zeta_h \omega_h Z + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + i L_{hI}) & -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{\alpha R} + i L_{\alpha I}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + i M_{hI}) & Z^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha Z + \omega_\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

式(3.21)は $Z$ に関する複素係数の4次代数方程式であり、4個の複素根をもっている。

複素根の実数部は、式(3.19)より減衰項 $(-\delta\omega/2\pi)$ に相当し、虚数部は連成振動数 $\omega$ に対応している。したがって、式(3.21)の複素根 $Z$ のうち、正の虚数部を有する2根が物理的に有意な根であり、それぞれ、ねじれ分岐とたわみ分岐に対応する。<sup>5) 6)</sup>

数値計質例として、断面形状が翼形で幅員 $2b = 3.6$  mの吊橋に傾斜角 $\beta = 0^\circ$ の風が作用する場合を考える。(空気力にTheodorsen関数を使用)吊橋の振動特性は、質量パラメータ $\mu = m/\pi\rho b^2 = 33.33$ 、慣性モーメント・パラメータ $\nu = I_\alpha/\pi\rho b^4 = 20.83$ 、たわみ振動数 $N_h = 0.2$  Hz、ねじれ振動数 $N_\alpha = 0.4$  Hz、構造減衰 $\delta_h = \delta_\alpha = 0$ とする。

このとき、式(3.21)から得られる2根の複素根から、それぞれ対数減衰率 $\delta$ を算出し、換算風速 $\bar{V}$ との関係で図示したのが図-3.1である。また、そのときの振動モードを $b\alpha/h (= \alpha/\bar{h})$ として複素ベクトル表示すると図-3.2のようになる。縦軸は、複素数 $b\alpha/h$ の絶対値(abs)，横軸は位相角(arg)を表示している。



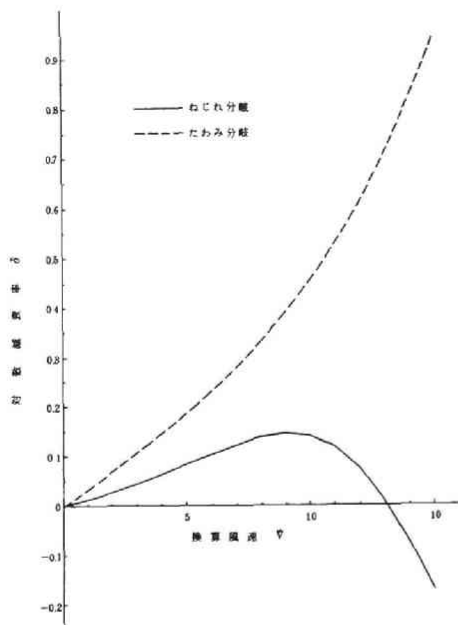


図-3.1 ねじれ分岐とたわみ分岐の対数減衰率

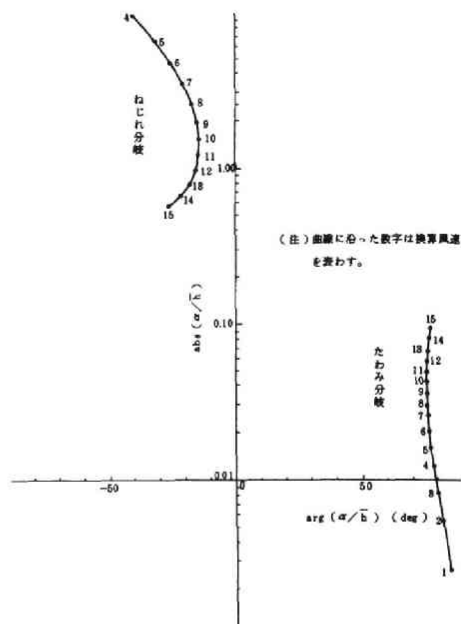


図-3.2 ねじれ分岐とたわみ分岐の振動モード ( $\alpha/h$ )

### 3.3 振動条件が2次元剛体の耐風応答におよぼす影響<sup>2)</sup>

#### 3.3.1 たわみ、ねじれ2自由度振動における対数減衰率の誘導

気流中に、たわみ・ねじれ2自由度でばね支持された2次元剛体の耐風安定性を検討する目安として、対数減衰率の誘導を試みる。

2次元剛体の運動方程式は、式(2.35)より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= (-\delta/2\pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_h \omega_h (-\delta/2\pi + i) \omega + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + i L_{hI}) \\ B &= -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{\alpha R} + i L_{\alpha I}) \\ C &= -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + i M_{hI}) \\ D &= (-\delta/2\pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha (-\delta/2\pi + i) \omega + \omega_\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

このとき、 $\bar{h}$ ,  $\alpha$  が有意な解を有するための条件は、

$$A D - B C = 0 \quad (3.24)$$

式(3.24)は複素方程式であるから、実数部と虚数部に分離し、整理すると次のようになる。

$$C_3 C_4 - C_5 - (-\delta/\pi + C_1)(-\delta/\pi + C_2) = 0 \quad (3.25)$$

$$C_3(-\delta/\pi + C_2) + C_4(-\delta/\pi + C_1) - C_6 = 0 \quad (3.26)$$

ただし、

$$C_1 = 2\zeta_h(\omega_h/\omega) - L_{hI}/\mu \quad (3.27)$$

$$C_2 = 2\zeta_\alpha(\omega_\alpha/\omega) - M_{\alpha I}/\nu \quad (3.28)$$

$$C_3 = -1 + (\omega_h/\omega)^2 - L_{hR}/\mu + \delta^2/4\pi^2 - \zeta_h\omega_h\delta/(\pi\omega) = \tilde{L}_{hR} \quad (3.29)$$

$$C_4 = -1 + (\omega_\alpha/\omega)^2 - M_{\alpha R}/\nu + \delta^2/4\pi^2 - \zeta_\alpha\omega_\alpha\delta/(\pi\omega) = \tilde{M}_{\alpha R} \quad (3.30)$$

$$C_5 = (L_{\alpha R} M_{hR} - L_{\alpha I} M_{hI})/(\mu\nu) \quad (3.31)$$

$$C_6 = (L_{\alpha R} M_{hI} + L_{\alpha I} M_{hR})/(\mu\nu) \quad (3.32)$$

上式における係数  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) の物理的意味を検討すると次のようになる。

係数  $C_1$  と  $C_2$  は、それぞれ、たわみ 1 自由度のときの対数減衰率  $\delta_z$  とねじれ 1 自由度の対数減衰率  $\delta_\theta$  を  $\pi$  で除したものに相当する。

係数  $C_3$  と  $C_4$  は、連成空気力係数  $L_\alpha$ ,  $M_h$  の構成成分で、振動 1 自由度のときの  $\frac{L_{hR}}{\mu}$ ,  $\frac{M_{\alpha R}}{\nu}$  と振動 2 自由度のときの対応成分との差を表わしている。

係数  $C_5$  と  $C_6$  は連成空気力係数の項である。ここで、注目すべきことは、式(3.25)と式(3.26)において、連成空気力係数を含む項は、係数  $C_5$  と  $C_6$  だけであることで、4 個の連成空気力係数  $L_{\alpha R}$ ,  $L_{\alpha I}$ ,  $M_{hR}$ ,  $M_{hI}$  は 2 個の係数  $C_5$ ,  $C_6$  に圧縮されたことになる。

振動系の対数減衰率  $\delta$  と円振動数  $\omega$  は、式(3.25)と式(3.26)の連立方程式から導くことができるが、その際、連成空気力係数として、 $C_5$  と  $C_6$  の項だけを考慮すればよいということになる。そのことは、連成空気力係数の検出段階で、4 個の連成空気力係数の代りに、2 個の係数  $C_5$  と  $C_6$  だけを検出することに作業内容をしばってもよいことを意味している。

さて、式(3.26)より

$$\delta = \pi (C_2 C_3 + C_1 C_4 - C_6) / (C_3 + C_4) \quad (3.33)$$

いま、無風時のねじれと、たわみの対数減衰率を、それぞれ  $\delta_h$ ,  $\delta_\alpha$  とするとき、式(3.3), 式(3.16)より

$$\delta_h = 2\pi\zeta_h(\omega_h/\omega_{h0}), \quad \delta_\alpha = 2\pi\zeta_\alpha(\omega_\alpha/\omega_{\alpha0}) \quad (3.34)$$

となることを考慮して、式(3.33)を書き直すと

$$\delta = \frac{(\frac{\omega_{\alpha0}}{\omega})\delta_\alpha - \frac{\pi}{\nu}M_{\alpha I}}{1 + \tilde{M}_{\alpha R}/\tilde{L}_{hR}} + \frac{(\frac{\omega_{h0}}{\omega})\delta_h - \frac{\pi}{\mu}L_{hI}}{1 + \tilde{L}_{hR}/\tilde{M}_{\alpha R}} - \frac{\pi(L_{\alpha R}M_{hI} + L_{\alpha I}M_{hR})}{\mu\nu(\tilde{L}_{hR} + \tilde{M}_{\alpha R})} \quad (3.35)$$

ただし、

$$\omega_{h0} : \text{無風時のたわみ円振動数} \quad (= \omega_h \sqrt{1 - \zeta_h^2})$$

$$\omega_{\alpha0} : \text{無風時のねじれ円振動数} \quad (= \omega_\alpha \sqrt{1 - \zeta_\alpha^2})$$

式(3.35)の右辺第1項の分子は、ねじれ1自由度のときの対数減衰率に、右辺第2項の分子は、たわみ1自由度のときの対数減衰率にそれぞれ相当している。また、右辺第3項は、たわみ、ねじれ2自由度の連成項  $L_{\alpha R}$ ,  $L_{\alpha I}$ ,  $M_{hR}$ ,  $M_{hI}$  を含んでいる。

### 3.3.2 構造減衰が構造物の耐風応答におよぼす影響

対数減衰率を、振動自由度との関係でまとめると次のようになる。

ねじれ1自由度のとき

$$\delta_\theta = (\frac{\omega_{\alpha0}}{\omega_\theta})\delta_\alpha - \frac{\pi}{\nu}M_{\alpha I} \quad (3.36)$$

たわみ1自由度のとき

$$\delta_z = (\frac{\omega_{h0}}{\omega_z})\delta_h - \frac{\pi}{\mu}L_{hI} \quad (3.37)$$

たわみ・ねじれ2自由度のときは式(3.35)となる。

無風時の対数減衰率  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_h$  は、構造減衰  $\delta_{\alpha s}$ ,  $\delta_{hs}$  と無風時の空力減衰  $\delta_{\alpha a}$ ,  $\delta_{ha}$  の和と考えることができる。

すなわち、

$$\delta_\alpha = \delta_{\alpha s} + \delta_{\alpha a} \quad (3.38)$$

$$\delta h = \delta h_s + \delta h_a \quad (3.39)$$

いま、構造減衰が $\Delta \delta_{\alpha s}$ 、 $\Delta \delta_{hs}$ だけ変化したとすると、有風時の対数減衰率の変化 $\Delta \delta$ は次のようになる。

ねじれ1自由度のとき

$$\Delta \delta = \frac{\omega_{\alpha 0} + \Delta \omega_{\alpha 0}}{\omega_{\theta}} \Delta \delta_{\alpha s} + \frac{\Delta \omega_{\alpha 0}}{\omega_{\theta}} \delta_{\alpha s} \quad (3.40)$$

たわみ1自由度のとき

$$\Delta \delta = \frac{\omega_{ho} + \Delta \omega_{ho}}{\omega_z} \Delta \delta_{hs} + \frac{\Delta \omega_{ho}}{\omega_z} \delta_{hs} \quad (3.41)$$

たわみ・ねじれ2自由度のとき

$$\Delta \delta = \frac{\frac{\omega_{\alpha 0} + \Delta \omega_{\alpha 0}}{\omega} \Delta \delta_{\alpha s} + \frac{\Delta \omega_{\alpha 0}}{\omega} \delta_{\alpha s}}{1 + \tilde{M}_{\alpha R} / \tilde{L}_{hR}} + \frac{\frac{\omega_{ho} + \Delta \omega_{ho}}{\omega} \Delta \delta_{hs} + \frac{\Delta \omega_{ho}}{\omega} \delta_{hs}}{1 + \tilde{L}_{hR} / \tilde{M}_{\alpha R}} \quad (3.42)$$

ただし、

$\Delta \omega_{ho}$  ; たわみ構造減衰が $\Delta \delta_{hs}$ だけ変化したことによる無風時のたわみ円振動数の変化量

$\Delta \omega_{\alpha 0}$  ; ねじれ構造減衰が $\Delta \delta_{\alpha s}$ だけ変化したことによる無風時のねじれ円振動数の変化量

ここで、構造減衰の変化によって振動数が受ける影響が微小で、実用上、無視できるとき、式(3.40)、式(3.41)は次式のようになる。

ねじれ1自由度のとき

$$\Delta \delta = \frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega_{\theta}} \Delta \delta_{\alpha s} \quad (3.43)$$

たわみ1自由度のとき

$$\Delta \delta = \frac{\omega_{ho}}{\omega_z} \Delta \delta_{hs} \quad (3.44)$$

ここで、

$\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega_{\theta}}$  ; 無風時のねじれ円振動数 $\omega_{\alpha 0}$ と有風時(無風時を含む)のねじれ円振動数 $\omega_{\theta}$ の比で、気流によるねじれ振動数の変化の割合を示す。

$\frac{\omega_{ho}}{\omega_z}$  ; 無風時のたわみ円振動数 $\omega_{ho}$ と有風時(無風時を含む)のたわみ円振動数 $\omega_z$ の比

で、気流によるたわみ振動数の変化の割合を示す。

式(3.43)と式(3.44)から明らかなように、構造減衰の変化に対する振動数の変化を無視できる条件が満たされるときに限り、ねじれ1自由度または、たわみ1自由度振動の場合、構造減衰の変化量 $\Delta\delta_{\alpha s}$ ,  $\Delta\delta_{hs}$ に、気流による振動数の変化の割合 $(\omega_{\alpha 0}/\omega_{\theta})$ ,  $(\omega_{h0}/\omega_z)$ を乗じた量をそのまま風的作用を受ける構造物の対数減衰率に重ね合せることができる。さらに、気流による振動数の変化が無視できるときは、構造減衰の変化量 $\Delta\delta_{\alpha s}$ ,  $\Delta\delta_{hs}$ をそのまま、構造物の対数減衰率に重ね合せることができる。<sup>7)</sup>

それに対して、たわみ・ねじれ2自由度の場合、式(3.42)に示すように有風時の構造物の対数減衰率は、構造減衰の変化に対して動的空気力の影響を無視することができず、特に動的空気力の実数部 $M\alpha R$ と $LhR$ の影響に留意する必要がある。

たわみ・ねじれ2自由度振動における構造減衰 $\delta_h$ ,  $\delta_{\alpha}$ の耐風性に及ぼす影響を具体的に調べたのが図-3.3, 図-3.4である。

振動モデルは3.2.3の断面形状が翼形の吊橋と同一であるが、構造減衰だけ変化させている。すなわち、図-3.3では $\delta_{\alpha} = 0.00, 0.03, 0.10$ の3ケース、図-3.4では $\delta_h = 0.00, 0.03, 0.10$ の3ケースとしている。図では構造物の耐風性として、ねじれ対数減衰率に着目しているが、図-3.3から、ねじれ構造減衰 $\delta_{\alpha}$ の影響を判別すると、たわみ・ねじれ連成振動にかかわらず、構造減衰の変化分がそのまま対数減衰率の値に重ね合せられるようである。したがって、ねじれ対数減衰率が $\delta = 0$ となる限界風速近傍での $V - \delta$

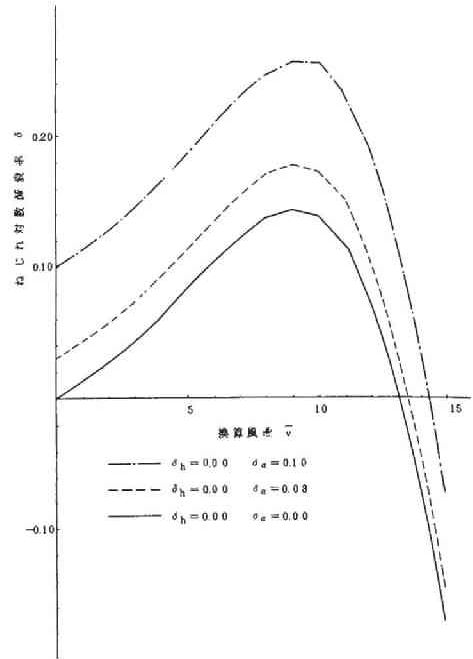


図-3.3 ねじれ構造減衰の影響

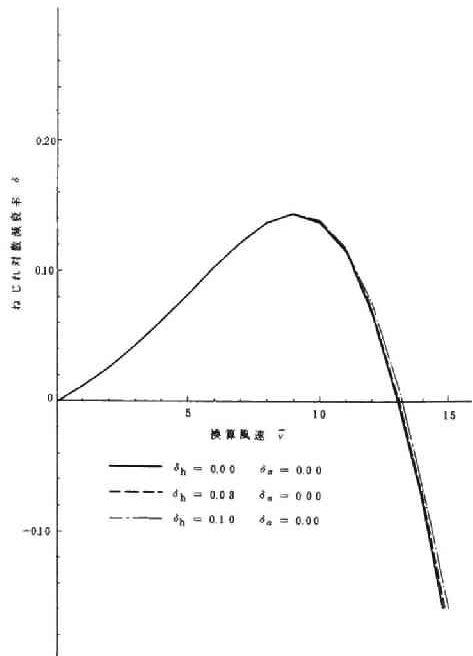


図-3.4 たわみ構造減衰の影響

曲線の形状がわかれば、ねじれ構造減衰の付加による限界風速の上昇分を予測することができる。  
例えば、図-3.3の場合次式のように近似される。

$$V_{cr} = -19.21 \delta_{\alpha}^2 + 13.23 \delta_{\alpha} + 13.10 \quad (3.45)$$

上式において、 $\delta_{\alpha} = 0$  のとき  $\bar{V}_{cr} = 13.10 (13.05)$ 、 $\delta_{\alpha} = 0.03$  のとき  $\bar{V}_{cr} = 13.48$  (13.45)、 $\delta_{\alpha} = 0.10$  のとき  $\bar{V}_{cr} = 14.23 (14.26)$  となる。ただし( )内の値は図-3.3から読み取った限界風速値 $\bar{V}_{cr}$ である。

たわみ構造減衰 $\delta_h$ のねじれ対数減衰率に及ぼす影響は図-3.4に示すように微少であって、ねじれ振動の空力減衰(対数減衰率)が正の極大値から負に向かって減少を始めるあたりから、たわみ構造減衰の影響がわずかに認められるようになる。

### 3.3.3 質量、慣性モーメントが構造物の耐風応答におよぼす影響

質量と慣性モーメントは、2次元剛体の運動方程式の中で、次の無次元項として考慮されている。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= m / (\pi \rho b^2) \\ \nu &= I_{\alpha} / (\pi \rho b^4) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

動的空気力係数が既知のとき、 $\mu$ と $\nu$ が対数減衰率 $\delta$ におよぼす影響は、式(3.35)～式(3.37)により算定することができる。特に、振動が1自由度のときは、次式の関係が成立する。

ねじれ1自由度の場合

$$I_{\alpha} \left[ \delta_{\theta} - \left( \frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega_{\theta}} \right) \delta_{\alpha} \right] / (\pi \rho b^4) = -\pi M_{\alpha} I \quad (3.47)$$

たわみ1自由度の場合

$$m \left[ \delta_z - \left( \frac{\omega_{h0}}{\omega_z} \right) \delta_h \right] / (\pi \rho b^2) = -\pi L_h I \quad (3.48)$$

ここで、風速の変化による振動数の変化を無視できるとすると

ねじれ1自由度の場合

$$I_{\alpha} \left[ \delta_{\theta} - \delta_{\alpha} \right] / (\pi \rho b^4) = -\pi M_{\alpha} I \quad (3.49)$$

たわみ1自由度の場合

$$m \left[ \delta_z - \delta_h \right] / (\pi \rho b^2) = -\pi L_h I \quad (3.50)$$

関係式(3.47)と式(3.48)あるいは、式(3.49)と(3.50)から、振動1自由度の場合の相似則を導くことができる。すなわち、実橋と模型の形状が幾何学的相似の関係にあれば、両者に作用する動的空気力係数 $M_{\alpha I}$ 、 $L_{h I}$ は等しいから、実橋と模型の振動性状の間に次のような関係が式(3.49)と式(3.50)より導かれる。

$$I_{\alpha p} (\delta \theta - \delta_{\alpha})_p / \rho_p b_p^4 = I_{\alpha m} (\delta \theta - \delta_{\alpha})_m / \rho_m b_m^4 \quad (3.51)$$

$$m_p (\delta z - \delta_h)_p / \rho_p b_p^2 = m_m (\delta z - \delta_h)_m / \rho_m b_m^2 \quad (3.52)$$

ここで、添字pは実橋、添字mは模型の諸量を示す。

模型と実橋の場合で、空気密度は一般に等しいから

$$\rho_m = \rho_p \quad (3.53)$$

とすると、式(3.51)、式(3.52)は次のようになる。

$$\frac{(\delta \theta - \delta_{\alpha})_p}{(\delta \theta - \delta_{\alpha})_m} = \frac{I_{\alpha m}}{I_{\alpha p}} \left( \frac{b_p}{b_m} \right)^4 \quad (3.54)$$

$$\frac{(\delta z - \delta_h)_p}{(\delta z - \delta_h)_m} = \frac{m_m}{m_p} \left( \frac{b_p}{b_m} \right)^2 \quad (3.55)$$

ここで、 $\delta \theta$ は、ねじれ1自由度のときの対数減衰率(空力減衰と構造減衰の和)、 $\delta z$ はたわみ1自由度のときの対数減衰率(空力減衰と構造減衰の和)、 $\delta_{\alpha}$ はねじれ構造減衰、 $\delta_h$ は、たわみ構造減衰である。すなわち $(\delta \theta - \delta_{\alpha})$ は、ねじれ1自由度のときの空力減衰、 $(\delta z - \delta_h)$ は、たわみ1自由度のときの空力減衰を表わす。

したがって、模型の空力減衰と慣性モーメントあるいは質量の間の相似関係は、反比例の関係にあるといえる。

$$I_{\alpha m} (\delta \theta - \delta_{\alpha})_m = I_{\alpha p} (\delta \theta - \delta_{\alpha})_p \cdot (b_m / b_p)^4 = \text{const} \quad (3.56)$$

$$m_m (\delta z - \delta_h)_m = m_p (\delta z - \delta_h)_p \cdot (b_m / b_p)^2 = \text{const} \quad (3.57)$$

いま、設定誤差を含んだ風洞実験値として慣性モーメント $I_{\alpha n}$ 、ねじれ空力減衰 $(\delta \theta - \delta_{\alpha})_n$ 、質量 $m_n$ 、たわみ空力減衰 $(\delta z - \delta_h)_n$ が得られたとすると

ねじれ1自由度

$$(\delta \theta - \delta_{\alpha})_m = (\delta \theta - \delta_{\alpha})_n (I_{\alpha n} / I_{\alpha m}) \quad (3.58)$$

たわみ1自由度 ；

$$(\delta z - \delta_h)_m = (\delta z - \delta_h)_n (m_n / m_m) \quad (3.59)$$

したがって誤差を含んだ実験値  $(\delta\theta - \delta\alpha)_n$ ,  $(\delta z - \delta_h)_n$  に補正係数  $(I_{\alpha n} / I_{\alpha m})$ ,  $(m_n / m_m)$  を乗じたものが本来の実験値  $(\delta\theta - \delta\alpha)_m$ ,  $(\delta z - \delta_h)_m$  に相当する。

ところで, C. Scruton<sup>8)</sup> は式(3.56)と式(3.57)に対応する式として, 次式を提案している。  
ねじれ1自由度 ；

$$I_{\alpha m} \delta\alpha_m = I_{\alpha p} \delta\alpha_p (b_m / b_p)^4 = \text{const} \quad (3.60)$$

たわみ1自由度 ；

$$m_m \delta h_m = m_p \delta h_p (b_m / b_p)^2 = \text{const} \quad (3.61)$$

C. Scrutonによると空力減衰ではなくて模型の構造減衰  $\delta\alpha_m$ ,  $\delta h_m$  が慣性モーメント  $I_{\alpha m}$  あるいは質量  $m_m$  と反比例の関係にあることになり, 設定誤差を含んだ実験値の補正值は, ねじれ振動で  $\theta_{\alpha n} (I_{\alpha n} / I_{\alpha m})$ , たわみ振動で  $\delta h_n (m_n / m_m)$  と風速に無関係な値となる。

C. Scruton の考え方によると, 例えば構造減衰  $\delta\alpha_n$ ,  $\delta h_n$  が零の場合を想定するとき, 質量と慣性モーメントに設定誤差があっても実験結果の補正は不要となり, 物理的に不合理と思われる。

以上の議論は振動1自由度の場合であるが, ここで, たわみ・ねじれ2自由度振動における質量と慣性モーメントが構造物の耐風性におよぼす影響を数値的に調べる。対象とする構造物は3.2.3の断面形状が翼形の吊橋と同一であるが, 質量パラメータ  $\mu$  と慣性モーメント・パラメータ  $\nu$  だけ変化させる。図-3.5に質量パラメータ  $\mu$  を20.00, 33.33, 40.00と変化させた場合を示し, 図-3.6に慣性モーメント・パラメータ  $\nu$  を10.00, 20.83, 30.00と変化させた場合を図示する。図-3.5, 図-3.6とも構造減衰  $\delta_h = \delta\alpha = 0$  としているから, 図中における対数減衰率の値は  $\mu$  および  $\nu$  の影響を受けた空力減衰そのものを表

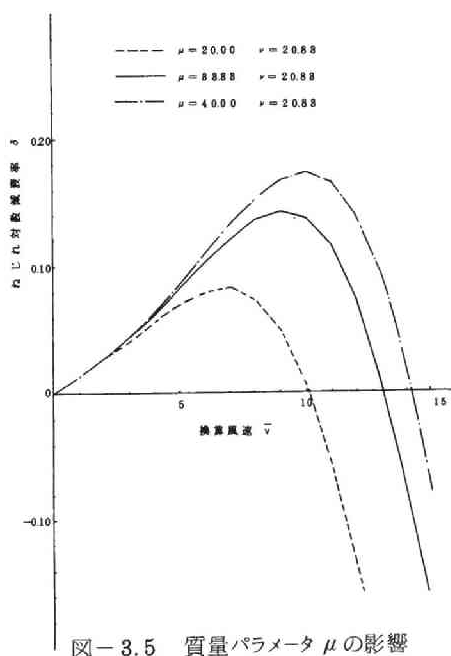


図-3.5 質量パラメータ  $\mu$  の影響



わしている。図-3.5は、質量パラメータ $\mu$ のねじれ対数減衰率 $\delta$ に与える影響を調べたものであるが、 $\mu$ の値によって、 $V-\delta$ 曲線はほぼ相似形に変化している。それに対して図-3.6に示すように慣性モーメントパラメータ $\nu$ のねじれ対数減衰率に及ぼす影響は、 $\nu$ の値によって $V-\delta$ 曲線が縦軸方向に押しつぶされていくような感じである。両者とも図-3.3のように $V-\delta$ 曲線が、 $\mu$ 、 $\nu$ の値によって0シフトするのではなく風速によって $\mu$ 、 $\nu$ の空力減衰に与える影響が変化していることに注意されたい。パラメータ $\mu$ 、 $\nu$ ともに値が大きくなると構造物の限界風速は上昇して耐風性が向上するが、特に質量パラメータ $\mu$ については、ねじれ対数減衰率に及ぼす影響を無視することができない。

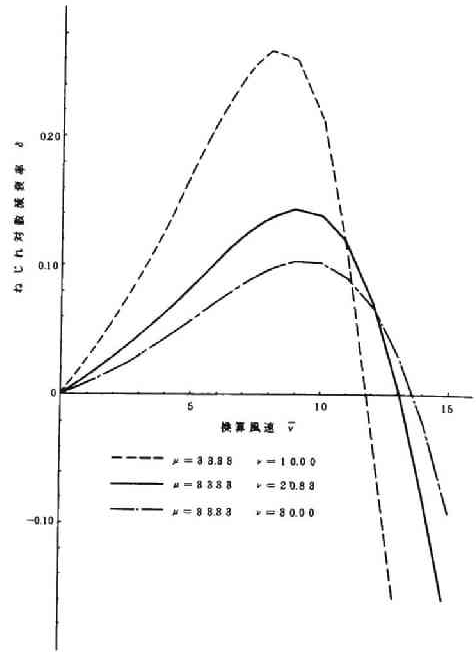


図-3.6 慣性モーメントパラメータ $\nu$ の影響

#### 3.3.4 振動数が構造物の耐風応答におよぼす影響

2次元剛体の応答特性を規定する対数減衰率と連成振動数は式(3.25)と(3.26)から算定される。両式の係数 $C_1, C_2, \dots, C_6$ には固有円振動数 $\omega_h$ と $\omega_\alpha$ が含まれている。ここで、

$$\omega = \omega_\alpha / \alpha \quad (3.62)$$

とするとき係数 $C_1, C_2, \dots, C_6$ は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2\zeta_\alpha \alpha (\omega_h / \omega_\alpha) - L_{hI} / \mu \\ C_2 &= 2\zeta_\alpha \alpha - M_{\alpha I} / \nu \\ C_3 &= -1 + \alpha^2 (\omega_h / \omega_\alpha)^2 - L_{\alpha R} / \mu + \delta^2 / 4\pi^2 - \zeta_h \delta \alpha (\omega_h / \omega_\alpha) / \pi \\ C_4 &= -1 + \alpha^2 - M_{\alpha R} / \nu + \delta^2 / 4\pi^2 - \zeta_\alpha \delta \alpha / \pi \\ C_5 &= (L_{\alpha R} M_{hR} - L_{\alpha I} M_{hI}) / (\mu \nu) \\ C_6 &= (L_{\alpha R} M_{hI} + L_{\alpha I} M_{hR}) / (\mu \nu) \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

式(3.63)において、固有円振動数  $\omega_h$  と  $\omega_\alpha$  は  $(\omega_h/\omega_\alpha)$  としてまとめられ、 $\omega$  の代りに  $\alpha$  が未知数となっている。このとき式(3.25)と(3.26)から  $\delta$  と  $\alpha (= \omega_\alpha/\omega)$  が算出されることになる。

したがって、固有円振動数として振動数比  $(\omega_h/\omega_\alpha)$  が一定ならば  $\delta$  と  $\alpha$  は一定値を示すことになる。換言すると構造物の耐風応答に影響をおよぼすのは振動数  $\omega_h$ 、 $\omega_\alpha$  ではなくて振動数比  $(\omega_h/\omega_\alpha)$  である。ただし、連成振動数は式(3.62)で与えられているから、フラッター発振風速は、ねじれ振動数に比例して高くなる。すなわち、

$$V = \frac{b \omega_\alpha}{2 \pi \alpha} \bar{V} \quad (3.64)$$

以上の関係を式で表現すると次のようになる。

$$V_{cr} = b \omega_\alpha \cdot f(\omega_h/\omega_\alpha) \quad (3.65)$$

振動数比  $N_\alpha/N_h (= \omega_\alpha/\omega_h)$  が構造物の耐風性に及ぼす影響を図示したのが図-3.7である。図中、縦軸は、ねじれ対数減衰率、横軸は換算風速である。対象とした構造物は3.2.3の断面形状が翼形の吊橋で振動数比だけ  $N_\alpha/N_h = 2.67, 2.00, 1.60$  と変化させたものである。図-3.7では、振動数比によって  $V-\delta$  曲線が相似形に変化しており、ちょうど質量パラメータ  $\mu$  の値が  $V-\delta$  曲線に及ぼす効果と同様の現象が認められる。

なお、数値計算によると  $V-\delta$  曲線の値は、 $N_\alpha/N_h$  によって決定され、 $N_\alpha/N_h$  が一定ならば  $N_h$  と  $N_\alpha$  が変化しても  $V-\delta$  曲線の形は変わらないことが確認された。

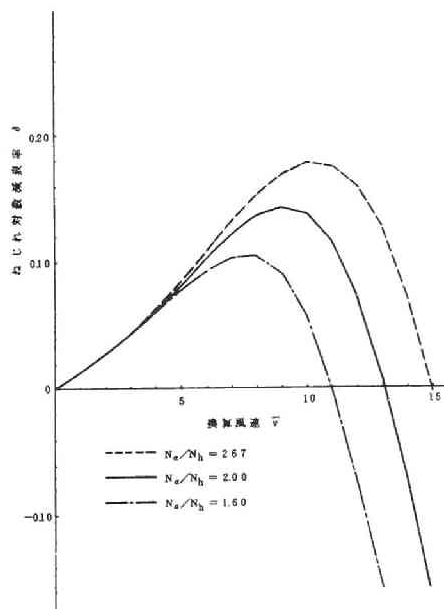


図-3.7 振動数比の影響

### 3.3.5 たわみ・ねじれ2自由度振動をねじれ1自由度振動として扱うときの問題点

トラス補剛桁吊橋では、ねじれ振動の卓越したねじれフラッターがよく発現する。この場合、ねじれ振動だけに着目して振動現象を解析することがよく行なわれている。ここでは、その手法の適

用範囲および有用性について検討する。

いま、空気力係数を振幅に関して多項近似すると、式(2.13)～式(2.16)が成立するが、ねじれ振動が卓越して、たわみ振動が微小なとき

$$\left. \begin{aligned} L_{hR} &= a_{R1} & L_{hI} &= a_{I1} \\ M_{hR} &= c_{R1} & M_{hI} &= c_{I1} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

また、振幅による振動数の変化は微小であるとする

$$M_{\alpha R} = d_{R1} \quad (3.67)$$

このとき、式(3.35)は次のようになる。

$$\delta = \left( \frac{\omega \alpha_0}{\omega} \right) \delta_\alpha - \frac{\pi}{\nu} \bar{M}_{\alpha I} \quad (3.68)$$

ただし、

$$\bar{M}_{\alpha I} = \sum_j D_j \alpha_0^{j-1} \quad (3.69)$$

$$D_1 = \frac{\frac{\nu}{\pi} \left( \frac{\omega \alpha_0}{\omega} \right) \delta_\alpha (\tilde{M}_{\alpha R} / \tilde{L}_{hR}) + d_{I1}}{1 + \tilde{M}_{\alpha R} / \tilde{L}_{hR}} + \frac{-\frac{\nu}{\pi} \left( \frac{\omega h_0}{\omega} \right) \delta_h + \frac{\nu}{\mu} a_{I1}}{1 + \tilde{L}_{hR} / \tilde{M}_{\alpha R}} \\ + \frac{c_{I1} b_{R1} + c_{R1} b_{I1}}{\mu (\tilde{L}_{hR} + \tilde{M}_{\alpha R})} \quad (3.70)$$

$$D_K = \frac{d_{IK}}{1 + \tilde{M}_{\alpha R} / \tilde{L}_{hR}} + \frac{c_{I1} b_{RK} + c_{R1} b_{IK}}{\mu (\tilde{L}_{hR} + \tilde{M}_{\alpha R})} \quad (K = 2, 3, \dots) \quad (3.71)$$

ここで、

$$\tilde{L}_{hR} = \left( \frac{\omega h}{\omega} \right)^2 - 1 - \frac{a_{R1}}{\mu} \quad (3.72)$$

$$\tilde{M}_{\alpha R} = \left( \frac{\omega \alpha}{\omega} \right)^2 - 1 - \frac{d_{R1}}{\nu} \quad (3.73)$$

ただし、式(3.72)と式(3.73)において、減衰定数 $\zeta$ の2次項を微小項として省いている。

式(3.68)はねじれ1自由度の場合の対数減衰率を与える式(3.36)と形の上で一致していて、空気力の係数は、 $d_{Ij}$ の代りに $D_j$  ( $j=1, 2, \dots$ )となっている。従ってたわみ・ねじれ2自由度振動を、ねじれ1自由度として扱うことができる条件は、動的空気力係数が、たわみ振幅 $\bar{h}_0$ に影響

されないことである。そのとき、係数  $\bar{M}_{\alpha I}$  は式(3.69)に示すように、ねじれ振幅  $\alpha_0$  の多項式として整理され、ねじれ1自由度の場合と形式上同様に、ねじれ対数減衰率を扱うことができる。

ここで注意を要することは、係数  $D_j$  は質量パラメータ  $\mu$  と  $\nu$ 、振動数比  $(\omega_\alpha/\omega)$  と  $(\omega_h/\omega)$  さらに初期減衰  $\delta_\alpha$  と  $\delta_h$  の関数となっていて、係数  $\bar{M}_{\alpha I}$  は、本質的に動的空気力係数  $M_{\alpha I}$  と異なる点である。したがって、本方法の適用にあたっては、振動条件の変化による減衰率の受ける影響について、十分注意を払う必要がある。ところで、 $D_j$  の定義式(3.70)、式(3.71)において、連成空気力係数が  $(C_{I1} b_{Rj} + C_{R1} b_{Ij})$  の項としてまとまっており、他の空気力係数  $a_{Rj}$ ,  $a_{Ij}$ ,  $d_{Rj}$ ,  $d_{Ij}$  を別途、たわみ、または、ねじれ1自由度実験から求めていけば、たわみ・ねじれ2自由度の実験値  $D_j$  から容易に連成空気力係数の項  $(C_{I1} b_{Rj} + C_{R1} b_{Ij})$  を算定することができる。その後、任意の実験条件のもとで係数  $D_j$  を動的空気力係数  $a_{Rj}$ ,  $a_{Ij}$ ,  $d_{Rj}$ ,  $d_{Ij}$  および  $(C_{I1} b_{Rj} + C_{R1} b_{Ij})$  から算出するようにすれば、 $\bar{M}_{\alpha I}$  は振動条件(質量パラメータ、振動数比、初期減衰)の影響を適確に評価することができ、本方法の有用性が発揮されるものと思われる。

### 3.3.6 連成空気力係数の簡易測定法

一般に、たわみ振動とねじれ振動の位相差を精度よく求めることは難しく、実験値のばらつきが大きいといわれている。そこで以下に、位相差を用いずに連成空気力係数を実験的に検出する簡易測定法について述べる。さて、空気力係数と対数減衰率と振動数比の間には式(3.25)、式(3.26)の関係が成立する。

すなわち、

$$\begin{aligned} P &= \mu \nu C_5 = L_{\alpha R} M_{hR} - L_{\alpha I} M_{hI} \\ &= \mu \nu C_3 C_4 - \mu \nu (\delta/\pi - C_1) (\delta/\pi - C_2) \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} Q &= \mu \nu C_6 = L_{\alpha R} M_{hI} + L_{\alpha I} M_{hR} \\ &= \mu \nu C_3 (-\delta/\pi + C_2) + \mu \nu C_4 (-\delta/\pi + C_1) \end{aligned} \quad (3.75)$$

ここで、 $C_1$ ,  $C_3$  はたわみ1自由度実験より検出される  $L_{hR}$ ,  $L_{hI}$  と連成円振動数  $\omega$  と対数減衰率  $\delta$  の関数であり、 $C_2$ ,  $C_4$  はねじれ1自由度実験より検出される  $M_{\alpha R}$ ,  $M_{\alpha I}$  と連成円振動数  $\omega$  と対数減衰率  $\delta$  の関数である。したがって、たわみ1自由度実験とねじれ1自由度実験の後に、たわみ・ねじれ2自由度実験を実施して  $\delta$  と  $\omega$  を測定すれば、式(3.74)と式(3.75)より連成空気力係数の項  $P$ ,  $Q$  を決定することができる。一方、振動1自由度の空気力係数  $L_{hR}$ ,  $L_{hI}$ ,  $M_{\alpha R}$ ,  $M_{\alpha I}$  と連成空気力係数の項  $P$ ,  $Q$  が既知のとき、式(3.74)と式(3.75)を用いて任意の風速と振幅における対数減衰率  $\delta$  と連成円振動数  $\omega$  を算定することができる。

### 3.4 2次元剛体における耐風応答の解析例<sup>2)</sup>

振動1自由度の場合、非線形動的空気力係数は風速と振幅と対数減衰率および振動数の関係から算出される。ここでは数値計算例として風速と振幅と対数減衰率の関係を図示した $V-A-\delta$ 曲線から非線形動的空気力係数を算出し、その空気力係数を構造物に作用させたときの耐風応答を解析する。対象とする構造物は本州四国連絡橋における吊橋の1設計案であって、風洞実験の実験条件を表3.1<sup>9)</sup>に示す。また、バネ支持実験の結果を整理した $V-A-\delta$ 曲線を図-3.8に図示する。この実験では、模型をたわみ・ねじれ2自由度で支持しているが実験結果の $V-A-\delta$ 曲線は、ねじれ振動に関してだけ整理されている。そこで3.3.5に述べているように、ねじれ1自由度振動として空気力係数を計算する。ここで算出される空気力係数は $\bar{M}_{\alpha I}$ で本来の空気力係数とは異なる点に注意を要する。まず、 $V-A-\delta$ 曲線から、多項近似により $V-A-\delta$ 数表を表-3.2のように作成する。次に、振動数比が不明のため $\omega_{\alpha 0}/\omega=1.0$ と仮定する。このとき、非線形動的空気力係数を $V-A-\delta$ 数表から計算することができる。その結果を表-3.3に示す。逆に非線形動的空気力係数が既知のとき、風速と振幅と対数減衰率の関係を導くことができる。たとえば、表-3.1の実験条件のもとで、ねじれ倍振幅2°のときの風速と対数減衰率の関係を $V-\delta$ 曲線として図-3.9に示す。また、換算風速 $\bar{V}=4.0$ のときの振幅と対数減衰率の関係を $A-\delta$ 曲線として図-3.10に示す。図-3.9、図3.10から明らかなように、動的空気力係数(表-3.3)からの計算値と実験値の誤差は $V-A-\delta$ 数表の作成時に発生しており、 $V-A-\delta$ 数表と計算値とは非常によく一致している。今後、非線形動的空気力係数の精度を高めるには、次のような項目を $V-A-\delta$ 曲線に追加して整理することが望ましい。すなわち、

- 1) 無風時の $V-\delta$ 関係
- 2) 低風時の $V-A-\delta$ 関係
- 3)  $V-A-\omega_{\alpha}/\omega$ 関係

### 3.5 結 言

本章では、まず、気流中で動的空気力を受ける2次元剛体の振動現象を、ねじれ1自由度の場合、たわみ1自由度の場合、たわみ・ねじれ2自由度の場合について、それぞれ風速と振幅と対数減衰率の関係で応答解析する手法について述べた。そのなかで、特にねじれ1自由度振動をとりあげて、振動が成長して、ある振幅に達するまでの所要時間の算出法について検討を加えた。次に、振動条件が2次元剛体の耐風応答におよぼす影響を調べるために、耐風性の目安として、対数減衰率に着目し、対数減衰率との関係において、構造減衰、質量、慣性モーメント、振動数比の影響を考察した。また、たわみ・ねじれ2自由度の実験結果を振動1自由度として扱う際の問題点として、その適用範囲および有用性について、ねじれ1自由度振動を例にして検討した。さらに、たわみ、ねじ

表-3.1 実験条件<sup>9)</sup>

模型支持状態		たわみ・ねじれ2自由度
模型主構間隔		0.4094 m
重 量		4280 g/m
極慣性モーメント		928 g・cm・sec <sup>2</sup> /m
振 動 数	たわみ振動	2.05 Hz
	ねじれ振動	4.31 Hz
構 造 減 衰	たわみ振動	0.036
	ねじれ振動	0.025

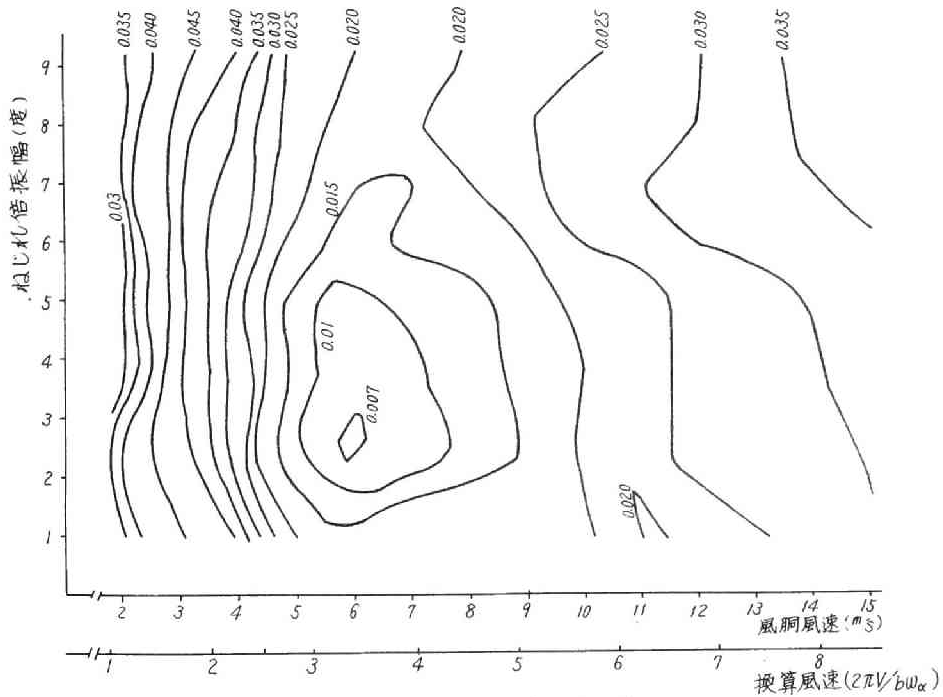


図-3.8 V-A- $\delta$  曲線

表 - 3.2 V - A -  $\delta$  数 表

ねじれ倍振幅 (度)	換 算 風 速 ( $2\pi V/b\omega_a$ )									
	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
1.0	0.024	0.041	0.036	0.025	0.017	0.016	0.019	0.024	0.028	0.031
2.0	0.028	0.043	0.031	0.016	0.010	0.014	0.022	0.028	0.029	0.033
3.0	0.023	0.041	0.029	0.014	0.008	0.012	0.023	0.031	0.031	0.022
4.0	0.024	0.041	0.030	0.016	0.010	0.014	0.022	0.029	0.030	0.024
5.0	0.023	0.041	0.030	0.015	0.010	0.015	0.023	0.030	0.029	0.025
6.0	0.024	0.040	0.032	0.020	0.015	0.018	0.026	0.033	0.035	0.035
7.0	0.024	0.042	0.034	0.022	0.017	0.020	0.029	0.037	0.035	0.021
8.0	0.024	0.042	0.035	0.025	0.020	0.022	0.028	0.032	0.036	0.045
9.0	0.024	0.041	0.037	0.027	0.019	0.019	0.026	0.033	0.032	0.011

表 - 3.3 非 線 形 動 の 空 気 力 係 数

		1	$\bar{V}$	$\bar{V}^2$	$\bar{V}^3$	$\bar{V}^4$	$\bar{V}^5$
実 数 部 $\bar{M}_{aR}$	1	-0.4464 E-04	0.3506 E-03	-0.2781 E-03	0.7525 E-04	-0.8770 E-05	0.3698 E-06
	$\alpha_0$	0.4562 E-04	-0.1399 E-03	0.1064 E-03	-0.2684 E-04	0.2776 E-05	-0.1024 E-06
	$\alpha_0^2$	-0.9592 E-05	0.2576 E-04	-0.1944 E-04	0.4728 E-05	-0.4568 E-06	0.1541 E-07
	$\alpha_0^3$	0.5541 E-06	-0.1851 E-05	0.1034 E-05	-0.2488 E-06	0.2842 E-07	-0.7568 E-09
虚 数 部 $\bar{M}_{aI}$	1	0.5749 E-03	-0.1849 E-00	0.7402 E-01	-0.1581 E-01	0.1488 E-02	-0.5920 E-04
	$\alpha_0$	0.3981 E-03	-0.4384 E-01	0.5394 E-01	-0.1524 E-01	0.1582 E-02	-0.4781 E-04
	$\alpha_0^2$	-0.6912 E-04	0.8605 E-02	-0.9954 E-02	0.2682 E-02	-0.2411 E-03	0.6251 E-05
	$\alpha_0^3$	0.4064 E-05	-0.4432 E-03	0.4747 E-03	-0.1119 E-03	0.8106 E-05	-0.7691 E-07

但し  $\bar{V} = \pi V / b\omega_a$  ,  $\nu = 1g / \pi \rho b^4 = 13.46$

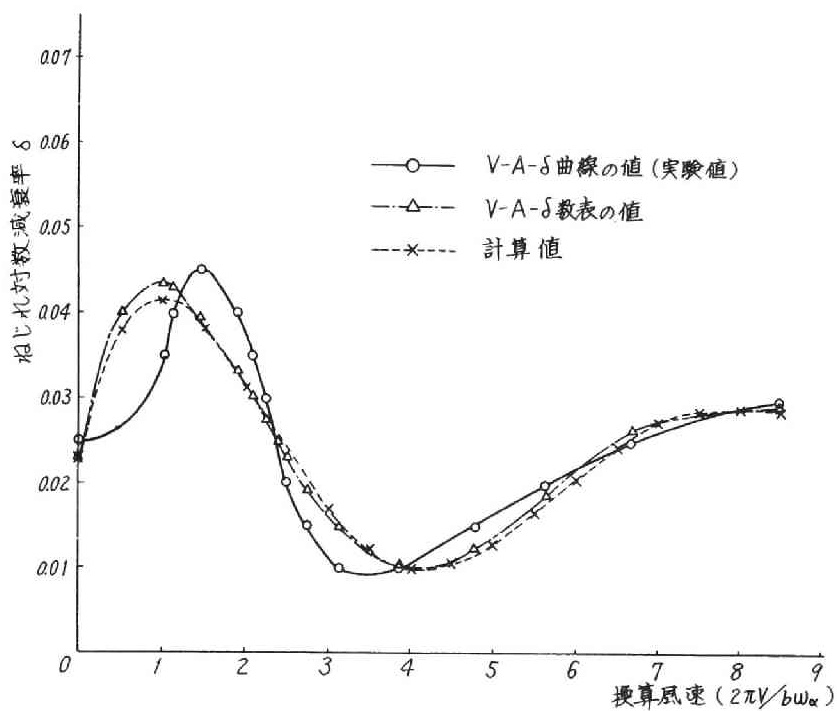


図-3.9 V- $\delta$  曲線 (ねじれ倍振幅  $2^\circ$ )

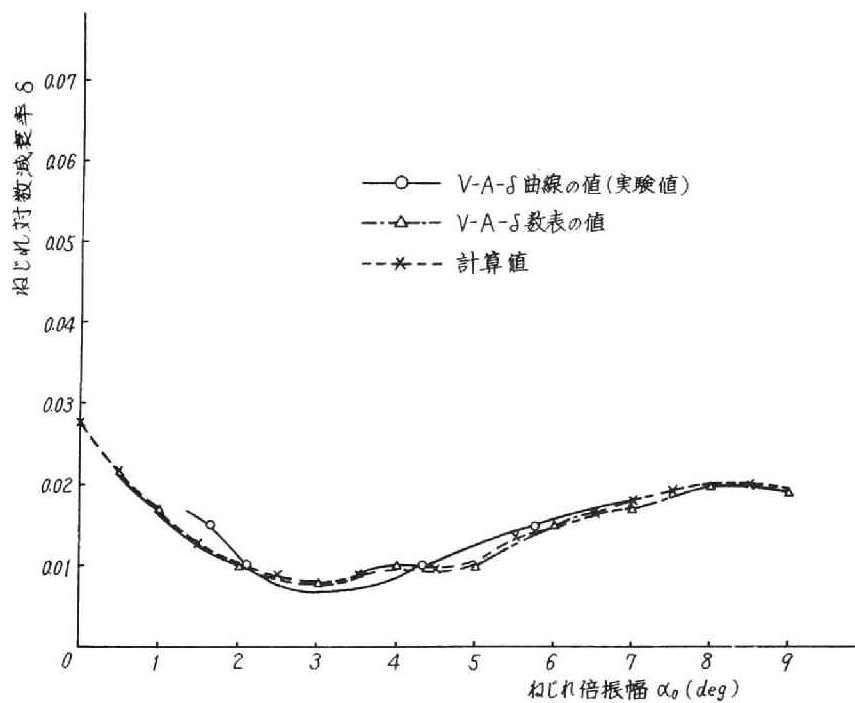


図-3.10 A- $\delta$  曲線 (換算風速 4.0)



れ振動の位相差を精度よく求めることは難しいといわれているが、位相差を用いなくて連成空気力係数を簡易的に算出する方法について提案した。以上の結果、次のことが明らかとなった。

- (1) 非線形動的空気力を受ける 2 次元剛体の応答を、本論文の手法によればエネルギー散逸が等価な線形振動系として、風速と振幅と対数減衰率の関係で容易に求めることができる。さらに、風速と振幅との関係に加えて、風の傾斜角や断面形状の関数として対数減衰率を考慮することもできる。
- (2) 本章では動的空気力係数から算出される対数減衰率と連成振動数を使って構造物の耐風応答を振幅および発振時間との関係で追跡する試みをねじれ 1 自由度振動をとりあげて提示したが、この手法をさらに構造物の耐風性に対する安全率評価と結びつけて展開することが考えられる。
- (3) たわみ・ねじれ 2 自由度の連成振動方程式では連成空気力係数として  $L_{\alpha R}$ ,  $L_{\alpha I}$ ,  $M_{hR}$ ,  $M_{hI}$  の 4 個が考慮されているが耐風性の指標である対数減衰率  $\delta$  の算定式では 4 個の連成空気力係数が P と Q の 2 係数に集約されている。したがって、実用的見地から考えると連成空気力係数として P と Q の 2 係数だけを考慮すればよいことになり、連成空気力係数の測定に際しても P と Q の検出だけに作業をしほることができる。その段階では、実験誤差の入り易い位相差を用いる必要がなくなる。
- (4) 構造減衰が構造物の耐風性に及ぼす影響は、振動 1 自由度の場合、気流による振動数の変化を無視できるとすると、構造減衰の変化量をそのまま構造物の対数減衰率（空力減衰）に重ね合わせることができる。振動 2 自由度の場合は、構造減衰の変化に対して、動的空気力係数の影響を無視することはできないが、数値計算例によると振動 1 自由度の場合と同様に、対数減衰率の重ね合わせが実用上許容されるようである。
- (5) 質量、慣性モーメントが構造物の耐風性に及ぼす影響を検討する目安として、対数減衰率との関係を調べると、振動 1 自由度の場合、質量、慣性モーメントと空力減衰は反比例の関係にあることが判明した。振動 2 自由度の場合には、動的空気力係数の影響があって単純にはいえないが、質量の値によって、ねじれ対数減衰率の  $V-\delta$  曲線はほぼ相似形に変化し、慣性モーメントの値では縦軸方向に押しつぶされていくような変形をする。
- (6) 構造物の耐風性を表わす対数減衰率の値は振動数  $N_{\alpha}$ ,  $N_h$  ではなく、振動数比  $N_{\alpha}/N_h$  によって決定され、 $N_{\alpha}/N_h$  が一定ならば、 $N_{\alpha}$  と  $N_h$  が変化しても同じ換算風速に対する対数減衰率の値は不変である。振動数比  $N_{\alpha}/N_h$  によって、ねじれ対数減衰率の  $V-\delta$  曲線の形は相似形に変化して、ちょうど質量パラメータ  $\mu$  が  $V-\delta$  曲線に与える影響と類似している。
- (7) たわみ振幅  $\bar{h}_0$  が動的空気力係数に及ぼす影響が微小と認められるとき、たわみ・ねじれ 2 自由度振動をみかけ上、ねじれ 1 自由度振動として、ねじれ対数減衰率を扱うことができる。その際、連成空気力係数は、結言(3)に対応して、 $(C_{II} b_{RJ} + C_{RI} b_{IJ})$  の項に集約される。

## 第 4 章 非線形動的空気力を受ける 3 次元構造物の耐風応答

### 4.1 概 説

第 3 章では、動的空気力を受ける 2 次元剛体の応答を振動条件との関係で検討したが、本章では、3 次元構造物の耐風応答を 2 次元剛体の挙動と対比させて検討する。吊橋等の 3 次元構造物には振動モードが無限個存在するから、その運動は、たわみ、ねじれ各 1 自由度に振動自由度を制約した 2 次元剛体の運動とは自ずと異なることが推定される。振動モード間の直交性が認められる場合、振動モードは相互に独立であるが、一般に吊橋では気流の影響によって、振動モード間の相互干渉が、複素振動モードの連成という形態で発生するようである。その場合、振幅とたわみ、ねじれ振動間の位相は橋軸方向に変化するから、吊橋は、いわゆる、のたうちまわるような振動を大なり小なり呈することになる。3 次元構造物の 2 次元剛体へのモデル化は吊橋のたわみ、ねじれ振動間の振幅比と位相が橋軸方向に一定であるという前提に基づいており、明らかに実情と異なっていることになる。そこで本章では、まず、3 次元構造物の運動方程式を誘導して、耐風応答について検討した後、振動モードが耐風性に及ぼす影響に留意して、3 次元構造物と 2 次元剛体の耐風応答について比較を行なう。さらに、吊橋の 3 次元性を無視できない例として、気流特性が橋軸方向に変化する場合と、吊橋の空力特性が橋軸方向に変化する場合について数値的に考察を加える。

### 4.2 3 次元構造物の運動方程式<sup>1) 2)</sup>

#### 4.2.1 運動方程式の誘導

たわみ、および、ねじれの振動形を次のように表示する。

$$\bar{h}(x, t) = \sum_j q_j(t) \eta_j(x) \quad (4.1)$$

$$\alpha(x, t) = \sum_j p_j(t) \varphi_j(x) \quad (4.2)$$

たわみ、ねじれ 2 自由度の振動をしている 3 次元構造物の運動エネルギーは、次のようになる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_j [M_j \dot{q}_j^2 b^2 + I_j \dot{p}_j^2] \quad (4.3)$$

ただし

$$M_j = \int_{\ell} m \eta_j^2 dx, \quad I_j = \int_{\ell} I_{\alpha} \varphi_j^2 dx \quad (4.3)$$

構造物の重心軸と弾性軸が一致しているとき、ポテンシャルエネルギーは、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_j [M_j \omega_{hj}^2 q_j^2 b^2 + I_j \omega_{\alpha j}^2 p_j^2] \quad (4.4)$$

散逸エネルギーは

$$D = \frac{1}{2} \sum_j [ 2 M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j^2 b^2 + 2 I_j \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j^2 ] \quad (4.5)$$

$q_j, p_j$  の仮想変位  $\delta q_j, \delta p_j$  を考えると, 仮想仕事は,

$$\delta W_j = Q_{hj} \delta q_j + Q_{aj} \delta p_j \quad (4.6)$$

一方, 一般力として, 構造物に作用する揚力  $L$  と空力モーメント  $M$  を考えるとき

$$\delta W_j = \int_{\ell} ( L \eta_j b \delta q_j + M \varphi_j \delta p_j ) d x \quad (4.7)$$

式 (4.3) ~ 式 (4.7) の関係より, ラグランジュの式を使うと,

$$M_j b^2 \ddot{q}_j + 2 M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j b^2 + M_j \omega_{hj}^2 q_j b^2 = \int_{\ell} L \eta_j b d x \quad (4.8)$$

$$I_j \ddot{p}_j + 2 I_j \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j + I_j \omega_{aj}^2 p_j = \int_{\ell} M \varphi_j d x \quad (4.9)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{\ell} L \eta_j b d x = \pi \rho b^4 \omega^2 \int_{\ell} [ ( L_{hR} + i L_{hI} ) \sum_k q_k \eta_k \eta_j \\ + ( L_{aR} + i L_{aI} ) \sum_k p_k \varphi_k \eta_j ] d x \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\ell} M \varphi_j d x = \pi \rho b^4 \omega^2 \int_{\ell} [ ( M_{hR} + i M_{hI} ) \sum_k q_k \eta_k \varphi_j \\ + ( M_{aR} + i M_{aI} ) \sum_k p_k \varphi_k \varphi_j ] d x \end{aligned} \quad (4.11)$$

このとき, 3次元構造物の, たわみ, ねじれ運動方程式は次式で表示される。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2 \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j = \frac{\omega^2}{\mu_j} \int_0^1 [ ( L_{hR} + i L_{hI} ) \sum_k q_k \eta_k \eta_j \\ + ( L_{aR} + i L_{aI} ) \sum_k p_k \varphi_k \eta_j ] d \bar{x} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j + 2 \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j + \omega_{aj}^2 p_j = \frac{\omega^2}{\nu_j} \int_0^1 [ ( M_{hR} + i M_{hI} ) \sum_k q_k \eta_k \varphi_j \\ + ( M_{aR} + i M_{aI} ) \sum_k p_k \varphi_k \varphi_j ] d \bar{x} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ただし

$$\mu_j = M_j / ( \pi \rho b^2 \ell ) \quad (4.14)$$

$$\nu_j = I_j / ( \pi \rho b^4 \ell ) \quad ( j = 1, 2, \dots ) \quad (4.15)$$

$$\bar{x} = x / \ell \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 ねじれ 1 自由度

トラス補剛桁吊橋などに卓越して発生するねじれ 1 自由度振動を考えると、構造物の運動方程式は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j + 2\zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} \dot{p}_j + \omega_{\alpha j}^2 p_j \\ = \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_j} \sum_k (M_{\alpha Rjk} + i M_{\alpha Ijk}) p_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

ただし

$\zeta_{\alpha j}$  : ねじれ  $j$  次振動の減衰定数,  $\omega_{\alpha j}$  : ねじれ  $j$  次振動の固有円振動数  
 $\omega_{\theta}$  : ねじれ連成円振動数

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha Rjk} &= \int_0^1 M_{\alpha R} \varphi_j \varphi_k d\bar{x} \\ M_{\alpha Ijk} &= \int_0^1 M_{\alpha I} \varphi_j \varphi_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

ここで

$$p_j = \bar{p}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2\pi + i) \omega_{\theta} \quad (4.19)$$

とすると、式(4.17)より次式が成立する。

$$[D_{jk}] \{ \bar{p}_j \} = \{ 0 \} \quad (4.20)$$

ただし

$$D_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} z + \omega_{\alpha j}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_j} (M_{\alpha Rjk} + i M_{\alpha Ijk}) \quad (4.21)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \quad (4.22)$$

式(4.20)において  $\{ \bar{p}_j \}$  が有意な解をもつための条件は

$$|D_{jk}| = 0 \quad (4.23)$$

たとえば、最低の 2 次モードまで考慮するとき、式(4.23)は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} z^2 + 2\zeta_{\alpha 1} \omega_{\alpha 1} z + \omega_{\alpha 1}^2 - \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_1} (M_{\alpha R11} + i M_{\alpha I11}) & -\frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_1} (M_{\alpha R12} + i M_{\alpha I12}) \\ -\frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_2} (M_{\alpha R21} + i M_{\alpha I21}) & z^2 + 2\zeta_{\alpha 2} \omega_{\alpha 2} z + \omega_{\alpha 2}^2 - \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_2} (M_{\alpha R22} + i M_{\alpha I22}) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

式(4.24) は  $z$  に関する複素係数の 4 次代数方程式であり、4 個の複素根  $z$  をもっているが、正の虚数部を有する 2 根が物理的に有意な根である。その 2 根は最低 2 次の振動モードに対応して、

根の実数部と虚数部から、気流中における3次元構造物の対数減衰率 $\delta$ と連成円振動数 $\omega_\theta$ をそれぞれ計算することができる。

すでに2.2で述べているように、動的空気力係数 $M_{\alpha R}$ 、 $M_{\alpha I}$ は換算風速 $\bar{V}$ の関数であると同時に、振幅 $\alpha_0$ と風の傾斜角 $\beta$ の関数である。したがって、式(4.24)から計算される $\omega_\theta$ および $\delta$ はある想定した風速 $\bar{V}$ 、振幅 $\alpha_0$ および風の傾斜角 $\beta$ の組合せについて成立することになる。たとえば、対象とする3次元構造物のねじれ振動に関して風速と振幅と対数減衰率の関係( $V-A-\delta$ 曲線)を誘導することができる。また、動的空気力係数 $M_{\alpha R}$ 、 $M_{\alpha I}$ は風の傾斜角 $\beta$ の関数でもあるから、地形などの影響により、スパン方向に風の傾斜角が変化するときの耐風性への影響も調べることができる。

#### 4.2.3 たわみ1自由度

角柱などに卓越して発生するたわみ1自由度振動を検討するとき、構造物の運動方程式は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j \\ = \frac{\omega_z^2}{\mu_j} \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k \end{aligned} \quad (4.25)$$

ただし

$\zeta_{hj}$ : たわみj次振動の減衰定数,  $\omega_{hj}$ : たわみj次振動の固有円振動数  
 $\omega_z$ : たわみ連成円振動数

$$\left. \begin{aligned} L_{hRjk} &= \int_0^1 L_{hR} \eta_j \eta_k d\bar{x} \\ L_{hIjk} &= \int_0^1 L_{hI} \eta_j \eta_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

ここで

$$q_j = \bar{q}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2\pi + i)\omega_z \quad (4.27)$$

とおくとき

$$[E_{jk}] \{ \bar{q}_j \} = \{ 0 \} \quad (4.28)$$

ただし

$$E_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}z + \omega_{hj}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega_z^2}{\mu_j} (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \quad (4.29)$$

式(4.28)において $\{ \bar{q}_j \}$ が有意な解をもつための条件は

$$|E_{jk}| = 0 \quad (4.30)$$

式(4.30)から、ねじれ1自由度振動の場合と同様に、3次元構造物の、たわみ1自由度振動に関する風速と振幅と対数減衰率の関係を導くことができる。

#### 4.2.4 たわみ・ねじれ2自由度

吊橋などの3次元構造物が、たわみ、ねじれ2自由度の振動をする場合を考えると、振動方程式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j \\ = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k + \sum_k (L_{\alpha Rjk} + iL_{\alpha Ijk}) p_k \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}\dot{p}_j + \omega_{\alpha j}^2 p_j \\ = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) q_k + \sum_k (M_{\alpha Rjk} + iM_{\alpha Ijk}) p_k \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} L_{\alpha Rjk} &= \int_0^1 L_{\alpha R} \eta_j \varphi_k d\bar{x} \\ L_{\alpha Ijk} &= \int_0^1 L_{\alpha I} \eta_j \varphi_k d\bar{x} \\ M_{hRjk} &= \int_0^1 M_{hR} \varphi_j \eta_k d\bar{x} \\ M_{hIjk} &= \int_0^1 M_{hI} \varphi_j \eta_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

ここで、

$$q_j = \bar{q}_j e^{zt}, \quad p_j = \bar{p}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2\pi + i)\omega \quad (4.34)$$

とするとき

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} & B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \\ C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & D_{11} & D_{12} & & D_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} & D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \\ \bar{p}_1 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

ただし

$$A_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}z + \omega_{hj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\mu_j}(L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \quad (4.36)$$

$$B_{jk} = -\frac{\omega^2}{\mu_j}(L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \quad (4.37)$$

$$C_{jk} = -\frac{\omega^2}{\nu_j}(M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \quad (4.38)$$

$$D_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}z + \omega_{aj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\nu_j}(M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \quad (4.39)$$

式(4.35)において  $\bar{q}_j, \bar{p}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) が有意な解をもつための条件は,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0 \quad (4.40)$$

式(4.40)は  $z$  に関する  $4n$  次の複素代数方程式で  $4n$  組の  $\omega$  および  $\delta$  が決定される。そのうち正值の  $\omega$  が物理的に有意であることを考慮すると、 $2n$  組の  $\omega$  と  $\delta$  が計算されるが、それらは、 $\omega_{hj}, \omega_{aj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) にそれぞれ対応した値になっている。

また、振動モードは、固有ベクトル  $\{\bar{q}_1 \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_n \bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n\}^T$  を用いて次のように表示される。

$$\bar{h}_r(x) = \sum_j \bar{q}_j^{(r)} \eta_j(x) \quad (4.41)$$

$$\alpha_r(x) = \sum_j \bar{p}_j^{(r)} \varphi_j(x) \quad (r = 1, 2, \dots, 2n) \quad (4.42)$$

ここで

$$\bar{q}_j^{(r)}, \bar{p}_j^{(r)} : r \text{ 次振動の固有ベクトルの成分 } \bar{q}_j, \bar{p}_j$$

$$\bar{h}_r(x) : r \text{ 次振動のたわみ振動形}$$

$$\alpha_r(x) : r \text{ 次振動のねじれ振動形}$$

### 4.3 3次元構造物と2次元剛体の耐風応答の比較

#### 4.3.1 概説

吊橋の耐風性の検討に際して実験的にはバネ支持実験、理論的にはBleich<sup>3)</sup>の理論あるいはSelberg<sup>4)</sup>の式がよく用いられている。これらは、いずれも吊橋を2次元振動体(たわみ, ねじ

れ各1自由度)にモデル化した2次元解析である。吊橋の耐風応答に2次元解析を適用する場合、曲げねじれフラッターの限界風速は、例えばSelbergの式によると、ねじれ振動数が低く、また、ねじれとたわみの振動数比  $\omega_\alpha/\omega_h$  が1に近い程、限界風速が低くなる。ねじれ振動数が低いということは、限界風速で発現する振動モードの次数が低いことを意味するが、一方ねじれとたわみの振動数比は高次の振動モードのときに、最低次の振動モードより1に近くなる場合もある。また、Selbergの式では評価されていないが、構造減衰の限界風速に及ぼす影響も無視することはできない。構造減衰の高い振動モードより構造減衰の低い振動モードの方が低い限界風速で発現し易いことは述べるまでもない。本章では、2次元解析により3次元構造物である吊橋の耐風応答を検討するに際して考慮すべき振動モードについて述べたいと思う。さらに、3次元構造物の耐風応答を2次元振動問題に還元できるのは、ある前提条件の場合に可能であり、そのような条件が成立しないときには、吊橋の3次元性に留意した耐風応答解析をする必要があると思われる。本章では吊橋に2次元解析が適用できる条件を整理した後、明らかに吊橋の3次元性を無視することができない場合の耐風性を検討する。

#### 4.3.2 フラッター振動モード<sup>5)</sup>

気流中における3次元構造物のたわみ、ねじれ連成振動方程式は、式(4.12)と式(4.13)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{\mathbf{q}}_j + \omega_{hj}^2\mathbf{q}_j \\ = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left[ \sum_k \int_0^1 L_h \eta_j \eta_k d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_k + \sum_k \int_0^1 L_\alpha \eta_j \varphi_k d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}_k \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_j + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}\dot{\mathbf{p}}_j + \omega_{\alpha j}^2\mathbf{p}_j \\ = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left[ \sum_k \int_0^1 M_h \varphi_j \eta_k d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_k + \sum_k \int_0^1 M_\alpha \varphi_j \varphi_k d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}_k \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

いま、式(4.43)と式(4.44)の右辺にある空気力の積分項に直交関係が成立するとすると

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{\mathbf{q}}_j + \omega_{hj}^2\mathbf{q}_j \\ = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left[ \int_0^1 L_h \eta_j^2 d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_j + \int_0^1 L_\alpha \eta_j \varphi_j d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}_j \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_j + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}\dot{\mathbf{p}}_j + \omega_{\alpha j}^2\mathbf{p}_j \\ = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left[ \int_0^1 M_h \varphi_j \eta_j d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_j + \int_0^1 M_\alpha \varphi_j^2 d\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}_j \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

この場合、運動方程式(4.43)と式(4.44)における振動モード間の連成項が消去されるため、



3次元構造物の運動方程式は2次元振動体の運動方程式に帰着する。このとき2次元振動体の耐風応答解析で考慮すべき振動モードは式(4.45)と式(4.46)より明らかにようにたわみ振動とねじれ振動が相互に同次の振動モードであって、異なる振動次数間の連成を無視して耐風性を検討することができる。換言すると、限界風速で発現する可能性のある振動モードの組合せは、たわみ1次-ねじれ1次、たわみ2次-ねじれ2次、……、たわみ $n$ 次-ねじれ $n$ 次であって、たわみ $n$ 次-ねじれ $m$ 次( $n \neq m$ )の組合せは考慮しなくてもよいことになる。このことから、2次元解析でフラッター振動モードの組合せを考慮する際に振動数比 $\omega_a/\omega_h$ を2次的要因として考えることができる。というのは、振動数比 $\omega_a/\omega_h$ は、異なる振動次数間の組合せにおいて $\omega_a/\omega_h \sim 1.0$ となる可能性を無視することができず、その影響が注目されていたからである。したがって、フラッター振動モードとしては、振動次数が低くて構造減衰の小さい振動形のたわみ振動とねじれ振動に選択的をしばることができる。

3次元構造物の耐風応答解析に、振動モード間の連成を無視した2次元解析ができる条件は式(4.45)と式(4.46)を導く段階で述べたように式(4.43)と式(4.44)における空気力の積分項に直交関係が成立することであるが、そのための十分条件を具体的に述べると次のようになる。

- ① たわみ振動形とねじれ振動形の間で相互に直交関係が成立すること。
- ② 風速、風の傾斜角等の気流特性が橋軸方向に一定であること。
- ③ 吊橋の断面形状が橋軸方向に一定であること。
- ④ 空気力係数が振幅に関して線形であること。

ところで、上に述べた条件①～④が同時に成立しないような一般的条件のもとでは、3次元構造物のフラッター解析において、式(4.43)と式(4.44)に示すように、他次の振動モードとの連成を無視することができなくなる。すなわち、振動モード間の連成に留意した3次元解析を実施する必要がある。

#### 4.3.3 動的空気力係数の非線形性の影響<sup>6)</sup>

動的空気力係数の値が振幅によって変化することを、ここでは、動的空気力係数が非線形であると表現するが、この場合、4.3.2の条件④を満たしていないので、他次振動モードとの連成が問題となってくる。さらに、3次元構造物では、橋軸方向に振動モードに従って振幅が変化するため、動的空気力係数は振幅の関数として橋軸方向に変化する。2次元剛体の振動では、空気力係数が橋軸方向に一定であるとしており、動的空気力係数の非線形性による3次元構造物と2次元剛体との耐風応答の相違が、この面からも導かれる。

本節では、まず、振動モード間の連成を無視して、振幅の関数として動的空気力係数が橋軸方向に変化することによる耐風応答への影響を検討した後非線形動的空気力のもとでの振動モード間の連成

について検討を加える。

3次元構造物が、ねじれ1自由度振動をする場合の運動方程式としてj次振動モードだけに着目すると、式(4.17)より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \ddot{P}_j + 2\zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} \dot{P}_j + \omega_{\alpha j}^2 P_j \\ = \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_j} \int_0^1 (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \varphi_j^2 d\bar{x} \cdot P_j \end{aligned} \quad (4.47)$$

2次元剛体のねじれ振動の運動方程式は、式(3.1)より、次のようである。

$$\begin{aligned} \ddot{P}_j + 2\zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} \dot{P}_j + \omega_{\alpha j}^2 P_j \\ = \frac{\omega_{\theta}^2}{\nu_0} (\bar{M}_{\alpha R} + i \bar{M}_{\alpha I}) P_j \end{aligned} \quad (4.48)$$

式(4.47)、式(4.48)より明かなように、ねじれ1自由度振動の場合、2次元剛体と3次元構造物との運動方程式の相違点は、右辺の空気力の項である。そこで、3次元構造物の空気力係数に対応した2次元剛体における等価な空気力係数は次式で与えられる。

$$\bar{M}_{\alpha R} + i \bar{M}_{\alpha I} = \frac{\nu_0}{\nu_j} \int_0^1 (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \varphi_j^2 d\bar{x} \quad (4.49)$$

ただし

$$\nu_j = \int_0^1 I_{\alpha} \varphi_j^2 d\bar{x} / \pi \rho b^4 \quad \nu_0 = I_{\alpha} / \pi \rho b^4 \quad (4.50)$$

いま、極慣性モーメント  $I_{\alpha}$  が橋軸方向に一定であるとする

$$\bar{M}_{\alpha R} + i \bar{M}_{\alpha I} = \int_0^1 (M_{\alpha R} + i M_{\alpha I}) \varphi_j^2 d\bar{x} / \int_0^1 \varphi_j^2 d\bar{x} \quad (4.51)$$

すなわち、2次元剛体における等価な空気力係数は、橋軸方向に変化する3次元構造物の空気力係数を積分によって平均化したものに相当する。

ところで、動的空気力係数  $M_{\alpha R}$ 、 $M_{\alpha I}$  と対数減衰率  $\delta_{\theta}$  の関係は式(3.3)より次式のようにある。

$$\delta_{\theta} = 2\pi \zeta_{\alpha} \left( \frac{\omega_{\alpha}}{\omega_{\theta}} \right) - \frac{\pi}{\nu} M_{\alpha I} \quad (4.52)$$

$$\omega_{\theta} = \omega_{\alpha} \sqrt{(1 - \zeta_{\alpha}^2) / (-\frac{1}{\nu} M_{\alpha R} - \frac{1}{4\nu^2} M_{\alpha I}^2 + 1)} \quad (4.53)$$

すなわち、動的空気力係数が橋軸方向に変化する3次元構造物の場合、対数減衰率も、動的空気力係数を介して、式(4.51)の積分によって平均化される。したがって、動的空気力係数が、非線形で、振動モードに従って、橋軸方向に空気力係数値が変化する3次元構造物の場合、振幅  $\alpha_0$  による対

数減衰率  $\delta$  の変化は、2次元剛体の場合に比べて鈍感となる傾向がある。

また、式(4.51)から、定常振動に関する2次元剛体の挙動と3次元構造物の挙動の関係についても、ある程度推定することができる。例えば、図-4.1のように定常振幅の曲線( $\delta=0$ )が  $\backslash$  型になっている場合、3次元構造物の挙動は、振幅  $A_0$  以下の  $\delta > 0$  なる振幅の影響を受けて、2次元剛体の挙動より耐風安定性が良好となる。

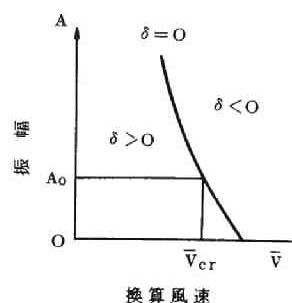


図-4.1 (安全側)

それに対して、図-4.2のように定常振幅の曲線( $\delta=0$ )が  $/$  型になっている場合、振幅  $A_0$  以下の  $\delta < 0$  なる振幅の影響で、耐風性が劣化する。したがって、2次元剛体を供試体としたバネ支持実験の結果から、3次元構造物である吊橋の耐風性を推定する際、図-4.2のような定常振幅の曲線を示す吊橋断面ではバネ支持実験の結果が実橋(3次元構造物)に比べて危険側となる傾向があるので、注意を要する。

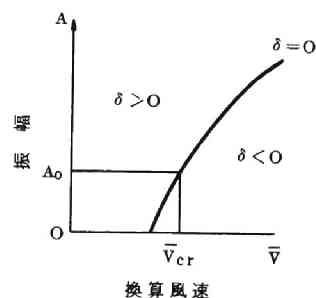


図-4.2 (危険側)

バネ支持実験の結果から、動的空気力の非線形性に留意して、3次元構造物の耐風性を推定するには、バネ支持実験の結果を式(2.44)に代入して、非線形動的空気力係数を、風速と振幅の関数として求めた後、式(4.17)を解析すれば、3次元構造物の空力特性を推定することができる。

ところで、久保、宮田、伊藤<sup>7)</sup>は、2次元剛体と3次元構造物の耐風性の対比を実験的に行なっているので、その実験結果に基づいて、動的空気力係数の非線形性の影響について数値的に検討する。図-4.3と図-4.4において△印と□印は、それぞれ久保・宮田・伊藤の実験によるバネ支持実験(2次元剛体)の結果と全体実験(3次元構造物)の結果を示している。それに対して、図-4.3における破線は△印の実験値( $V-A-\delta$ 曲線)から式(2.4.4)によって動的空気力係数を検出し、それから式(3.3)によって算出した $V-\delta$ 曲線である。また、実線はそうにして検出した2次元剛体に作用する動的空気力係数を用いて式(4.4.7)から誘導した全体模型(3次元構造物)の $V-\delta$ 曲線である。図-4.4における破線は式(3.3)から2次元剛体として算出した $A-\delta$ 曲線であり、実線は3次元構造物を対象とした式(4.4.7)による $A-\delta$ 曲線である。2次元剛体のバネ支持実験結果から全体模型(3次元構造物)の挙動を推定した、この数値計算結果は、実験値と $V-\delta$ 曲線の傾向が次の点でよく一致している。すなわち、 $V-\delta$ 曲線における対数減衰率 $\delta_\theta$ の風速 $\bar{V} (= \pi V / b \omega_\alpha)$ に対する変化は2次元剛体(破線あるいは△印)に比べて3次元構造物(実線あるいは□印)の方が緩やかである。しかしながら、供試体の $V-A-\delta$ 曲線が図-4.2のようなノ型であることから、限界風速( $\delta_\theta=0$ となる風速)は3次元構造物の方が2次元剛体に比べて低くなると予測されるが図-4.4に示す

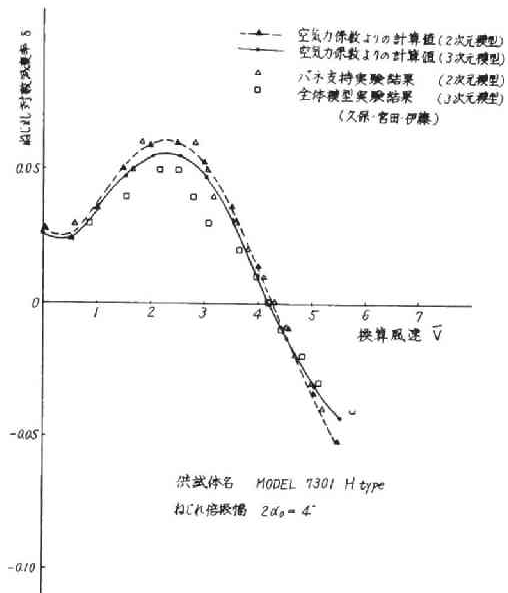


図-4.3  $V-\delta$  曲線

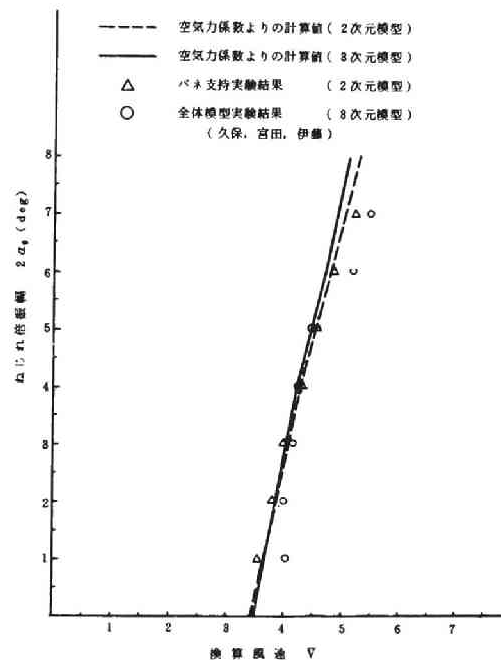


図-4.4  $A-\delta$  曲線

ように，わずかに倍振幅  $5^\circ$  近傍で，その傾向を示すだけで，他の振幅の領域では 3 次元構造物の方が高くなっている。

なお，久保，宮田，伊藤によると曲げ振動が付随しにくい断面では 3 次元構造物の方が低風速側で発振し，曲げ振動が付随し易い断面では 2 次元剛体の方が低風速側で発振する傾向を有すると述べている。曲げ振動が付随しにくい断面では，ねじれ定常振動が成長する傾向にあって， $V-A-\delta$  曲線は  $\nearrow$  型となる。曲げ振動が付随し易い断面では，クラシカル・フラッターとして， $V-A-\delta$  曲線の立ち上りは急であり  $\searrow$  型となる傾向を有している。

以上の議論は，振動モード間の連成を無視して，空気力係数の非線形性だけに注目しているが，次に，空気力係数の非線形性に起因した振動モード間の連成の影響について検討する。図-4.3 と図-4.4 で数値計算の対象としたのと同じ振動モデルで，振動自由度として，ねじれ対称 1，2 次ねじれ逆対称 1，2 次の計 4 自由度を考慮するとき， $V-\delta$  曲線における対数減衰率  $\delta$  の値はねじれ対称 1 次だけ考慮した場合の  $V-\delta$  曲線の値と有効数字 3 桁まで一致することが確認された。したがって空気力係数の非線形性に起因した振動モード間の連成効果はこの場合ほとんど無視できる。参考までに，ねじれ振動 4 次まで考慮したときの有風時におけるねじれ 1 次振動形を次式に示す。

$$\bar{V} = 5.0, \quad \alpha_0 = 2^\circ \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) = & \varphi_1(x) + 7.702 \times 10^{-8} e^{0.5132\pi i} \varphi_2(x) + 2.310 \times 10^{-3} e^{0.4822\pi i} \varphi_3(x) \\ & + 2.057 \times 10^{-10} e^{1.4832\pi i} \varphi_4(x) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\text{ただし} \quad \varphi_j(x) = \sin(j\pi x / \ell) \quad (4.55)$$

この振動モデルにおいて，振動モード間の連成がほとんど生じていない原因として，空気力係数の非線形性が弱いということの他に，振動方向をねじれ振動に制約して振動解析していることが 1 つの原因と推定される。同じ変位方向をもつ振動モード間（例えば，ねじれ振動同志）の連成が比較的弱いという事実は，振動モードの連成を調べた 4.4.2 において，ねじれ振動同志の連成よりも，ねじれ振動とたわみ振動の間の連成が卓越して発生していることから推定される。

## 4.4 3次元構造物の耐風応答

### 4.4.1 概説

3次元構造物の応答を2次元振動体にモデル化できるのは4.3.2で述べたように空気力の積分項に直交関係が成立する場合であって、一般的な条件のもとでは吊橋の3次元性に留意した解析をおこなう必要がある。吊橋の3次元性が特に問題となる具体例としては

- ① 架橋地点の地形の影響によって、局地的に風の傾斜角が変化する場合<sup>8)</sup>(例えば本州四国連絡橋における来島四径間吊橋(案)の場合)
- ② 公害対策として防音板を部分的に設置する場合
- ③ 補剛桁を橋軸方向に逐次架設していく吊橋架設中の場合<sup>9)~13)</sup>
- ④ 減衰器を設置した場合

などがある。ここでは、気流特性として風速分布が橋軸方向に変化する場合と、吊橋の断面形状として単床吊橋が局部的に複床構造となる場合について、その応答特性を考察する。減衰器を設置した場合については、第5章で検討する。また、吊橋の3次元性を配慮して振動モード間の連成を考える場合でも、振動方程式で扱える振動モードの数は有限個に限られ、実際の吊橋のように無限個の振動モードを考慮できる訳ではない。そこで、吊橋の耐風応答を実用上十分な精度で扱うに必要な振動モードについて、振動モードのエネルギー寄与率の関係から考察する。

### 4.4.2 気流特性が橋軸方向に変化する場合<sup>13)</sup>

吊橋は架設地点の地形あるいは気象条件によって橋軸方向に気流特性の異なった風の作用を受けることが多い。例えば、主塔あるいは側径間に隣接した山などの影響による局地的な風の吹き上げや吹き下しの問題などは、よく議論の対象となっている。ここでは、気流特性として風速分布に着目し、橋軸方向に風速が変化する場合の吊橋の耐風応答を振動モード間の連成の影響を受けた3次元構造物として解析する。

風速分布による構造物の耐風性の良否の検討が、実際の耐風設計に際して、どの程度実用上の意義があるか、意見の別れるところであるが、風速分布を空気力の分布とみなせば、局地風の傾斜角の問題あるいは構造物の部分的形状変化に伴う耐風性に対して、ある程度の目安を提供することができると思われる。例えば、補剛桁を架設中の吊橋は橋軸方向に補剛桁が部分的に設置されるため、補剛桁の既架設部分だけに風が作用して、未架設部分では風速が0とみなすことができる。その際、架設中の吊橋の耐風性は、気流特性(風速分布)が橋軸方向に変化する場合と類似してくる。

解析の対象とする吊橋は、スパン  $\ell = 100 \text{ m}$ 、幅員  $2b = 3.6 \text{ m}$  の単径間吊橋で、質量  $m = 42.41 \text{ kg} \cdot \text{S}^2/\text{m}^2$ 、慣性モーメント  $I_\alpha = 85.88 \text{ kg} \cdot \text{S}^2$ 、振動数は、たわみ1次  $0.234 \text{ Hz}$ 、2次  $0.159 \text{ Hz}$ 、3次  $0.318 \text{ Hz}$ 、(4次  $0.442 \text{ Hz}$ 、5次  $0.660 \text{ Hz}$ )、ねじれ1次  $0.443 \text{ Hz}$ 、2次  $0.620 \text{ Hz}$ 、

3次0.951Hz, (4次1.286Hz, 5次1.880Hz)とし、構造減衰は、たわみ、ねじれ共に  $\delta_h = \delta_a = 0$  とする。また、断面形状は翼形で風の傾斜角は  $\beta = 0^\circ$  とする。

(空気力に Theodorsen 関数を使用)

補剛桁が支点側からスパン中央に向って逐次架設されていく状態を想定して (A-1) 風が全スパンに一樣に吹きつける場合, (A-2) 中央部  $l/4$  を除いて風が吹きつける場合, (A-3) 支点側  $l/4$  の部分だけに風が吹きつける場合, (A-4) 支点側  $l/8$  の部分だけに風が作用する場合の4ケースについて、換算風速  $\bar{V} (= \pi V / b \omega)$  とねじれ1次対数減衰率  $\delta$  の関係について調べたのが図-4.5である。なお、ここでは、風速分布と吊橋の空力特性の関係を検討するため、橋軸方向の質量分布は一定としている。図-4.5から判別されるように風が吹きつける部分が少くなるにつれて  $V-\delta$  曲線のピーク値は縦軸方向に押しつぶされていくような変化をする。この変化は図-3.6に示すように慣性モーメントの増加によって  $V-\delta$  曲線が呈する変形と類似したものであり注目される。ところで、この振動モデル(吊橋)では構造減衰を零としているから、図中の対数減衰率はそのまま空力減衰を表わしている。振動モデルは動的空気力以外にエネルギーの吸収・放出源がないから風の吹きつける部分の空力減衰が吊橋全体系の対数減衰率を支配することになる。そう考えると、風速分布の如何にかかわらず限界風速 ( $\delta = 0$  となる風速) は一定となることが予測されるが風速分

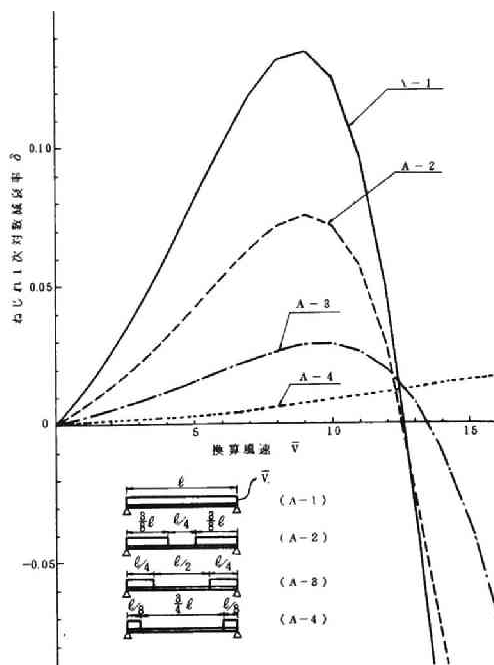


図-4.5 風速分布と耐風性の関係

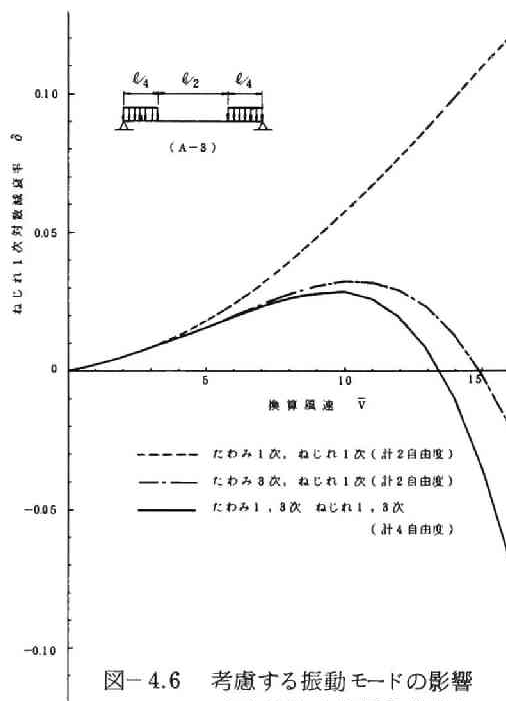


図-4.6 考慮する振動モードの影響  
(ねじれ1次振動分岐)

布によって限界風速は移動している。その原因として、振動モード間の連成効果の影響と考慮する振動モードの個数の影響が考えられる。

(図-4.5ではたわみ1, 2, 3次, ねじれ1, 2, 3次を考慮)そこで吊橋の応答解析で考慮する振動モードにより耐風性に関する計算結果がどのように影響を受けるか調べたのが図-4.6である。風速分布は(A-3)支点側  $l/4$  だけ吹きつける場合を対象とする。この数値計算では風速分布が橋軸方向に左右対称である関係から、偶数次の空気力成分は消去されて、奇数次の項だけが有意となっている。図-4.6より明らかなように、考慮する振動モードによりフラッター限界風速は大きく影響を受けている。ねじれ1次振動分岐の振動モードに対して、高次固有振動モードが有風時 ( $\bar{V}=13.0$ ) にどの程度寄与しているか調べたのが図-4.7である。

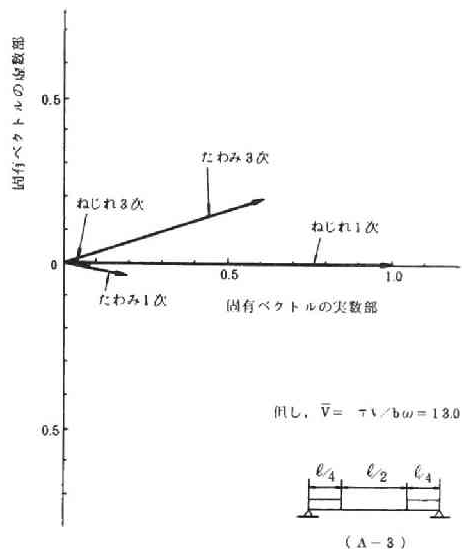


図-4.7 有風時における振動モード間の連成  
(ねじれ1次振動分岐)

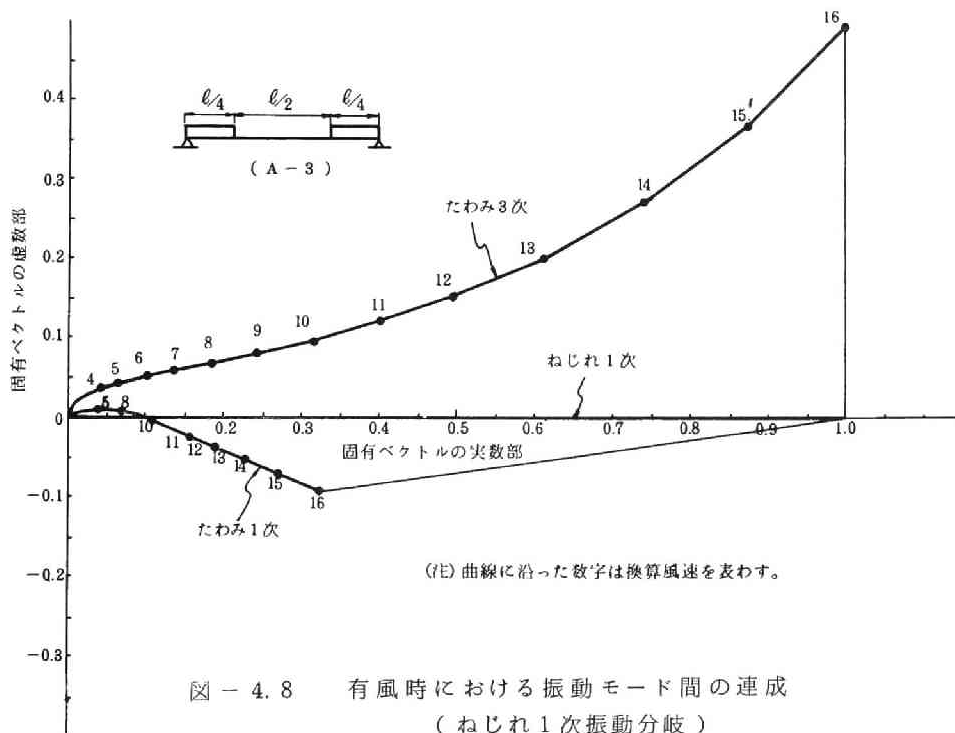


図-4.8 有風時における振動モード間の連成  
(ねじれ1次振動分岐)



ねじれ1次とたわみ3次、1次の連成が卓越していて、ねじれ1次とねじれ3次のねじれ振動同志の連成は微弱であることがわかる。図-4.8は、ねじれ1次とたわみ1次、3次の連成が風速によってどう変化するか図示したものである。風速が高まるにつれて、たわみ3次の振動成分の比重が飛躍的に高まり限界風速時には、近似的にねじれ1次とたわみ3次の連成振動が発現しているとみなせる。そのことは図-4.6において、ねじれ1次とたわみ1次を考慮した場合の $V-\delta$ 曲線（点線）とねじれ1次とたわみ3次を考慮した場合の $V-\delta$ 曲線（1点鎖線）を比較しても納得される。

以上は、たわみ、ねじれ共に振動モードとして3次まで考慮した場合であるが、より高次の振動が限界風速に与える影響について調べておく必要がある。ここでは、対象とする振動モードの運動エネルギーが構造系全体の運動エネルギーに占める割合から振動モードのエネルギー寄与率を検討する。各振動モードのエネルギー寄与率は次式から算定される。

たわみ $k$ 次振動の場合

$$\frac{T_k}{T} = \frac{M_k \bar{q}_k^2 b^2}{\sum_j [M_j \bar{q}_j^2 b^2 + I_j \bar{p}_j^2]} \quad (4.56)$$

ねじれ $k$ 次振動の場合

$$\frac{T_k}{T} = \frac{I_k \bar{p}_k^2}{\sum_j [M_j \bar{q}_j^2 b^2 + I_j \bar{p}_j^2]} \quad (4.57)$$

ただし、式中の記号は4.2と同様である。

図-4.6において、たわみ1、3次とねじれ1、3次を考慮した場合の限界風速は $\bar{V} = 13.4$ 、また連成振動数 $N = 0.4174$  Hzとなっている。考慮する振動次数をたわみ、ねじれ共に5次まで拡張すると、限界風速がどの程度移動するか調べたのが図-4.9である。計算法は限界風速時における式(4.40)の複素根として、 $z = -\frac{\delta \omega}{2\pi} + i \omega = 2.623i$  ( $\delta = 0.0$ ,  $N = \omega/2\pi = 0.4174$ )を設定して、式(4.35)からねじれ1次振動分岐に対応した振動モードを算出した後、式(4.56)と式(4.57)から振動モード間のエネルギー寄与率を計算する。いま、ねじれ1次振動分岐に着目すると、エネルギー最小の原理からねじれ1次固有振動モード

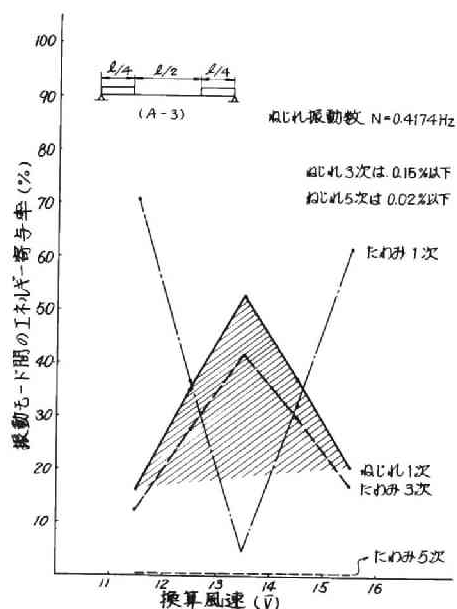


図-4.9 振動モード間のエネルギー比率  
(ねじれ1次振動分岐)

のエネルギー寄与率が最大となる風速が仮定した複素根  $Z$  に対応する真の風速（この場合はフラッター限界風速）を与えることになる。図-4.9では換算風速 11.5, 12.5, 13.5, 14.5, 15.5 の5風速でエネルギー比率を計算しており、詳細な風速きざみではないが、ねじれ1次固有振動モードのエネルギーは風速 13.5 近傍で最大となっていることが判別できて、図-4.5に示す風速分布（A-1）あるいは（A-2）の限界風速  $\bar{V} = 12.6$  とは明らかに異なることが理解される。次に、図-4.9で仮定した複素根  $Z$  ( $N = 0.4174 \text{ Hz}$ ) が妥当な値であるかどうかチェックするために、ねじれ1次振動分岐の振動数を  $N = 0.4164, 0.4174, 0.4184$  (Hz) と変化させたときの振動モード間のエネルギー寄与率 ( $\bar{V} = 13.5$ ) を図-4.10に示す。

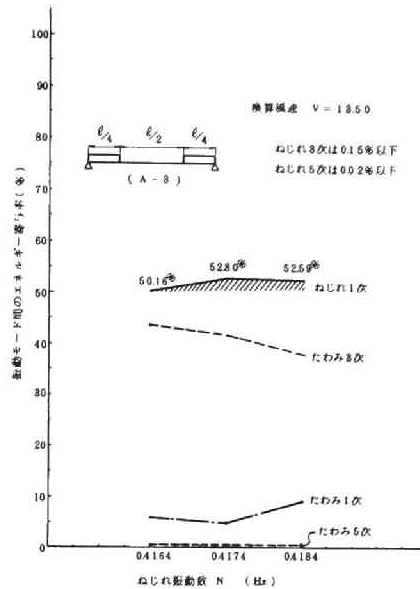
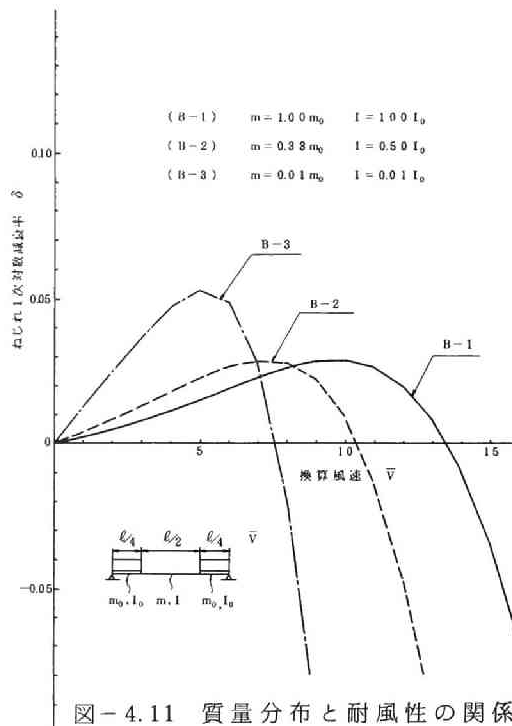


図-4.10 振動モード間のエネルギー比率  
(ねじれ1次振動分岐)

ねじれ1次固有振動モードのエネルギー寄与率は  $N = 0.4174 \text{ Hz}$  近傍で最大となっていることが認められる。さらに、5次固有振動モードのエネルギー寄与率はたわみ5次で0.5%、ねじれ5次で0.02%となっており実用上無視しても差しつかえない程度のエネルギー量であることが確認される。したがって図-4.9と図-4.10の考察から、高次振動（5次以上）の影響を無視してたわみ1, 3次とねじれ1, 3次を考慮した場合の限界風速は充分正確な値を与えているものと認められる。また、図-4.5に示すような風速分布による限界風速の相違は振動モード間の連成の影響によるものと判断される。

最後に、質量分布が橋軸方向に変化する場合の耐風性への影響について述べる。例えば、実際の吊橋の場合、補剛桁架設後の部分と架設前の部分では質量分布が相違している。そこで、補剛桁が支点側から  $l/4$  だけ架設された状態を想定して (B-1)  $m = m_0$ ,  $I = I_0$ , (B-2)  $m = 0.33m_0$ ,  $I = 0.50I_0$ , (B-3)  $m = 0.01m_0$ ,  $I = 0.01I_0$  の3ケースについて、換算風速  $\bar{V}$  とねじれ1次対数減衰率  $\delta$  の関係を解析したのが図-4.11である。質量分布 (B-1) の  $V-\delta$  曲線は図-4.5の風速分布 (A-3) の  $V-\delta$  曲線と同一のものである。ただし、補剛桁既架設部分の質量を  $m_0$ 、慣性モーメントを  $I_0$ 、未架設部分の質量を  $m$ 、慣性モーメント  $I$  とする。未架設部分の質量と慣性モーメントが小さいとき耐風性が悪くなるのは、式(4.31)と式(4.32)における質量パラメータ  $\mu_j$  と  $\nu_j$  が小さくなる分だけ、空気力係数が倍幅されることによる。



#### 4.4.3 構造物の空力特性が橋軸方向に変化する場合

吊橋を初めとする3次元構造物は、一般に、橋軸方向に一定の断面形状を有しており、その結果、橋軸方向に一定な空力特性を帯びることが多い。しかしながら場合によっては、構造上の制約以外にも使用条件や立地条件等により局部的に断面形が変化し、その影響を受けて空力特性が橋軸方向に変化することがある。特に最近では、車や列車の騒音公害に対する配慮から吊橋等の橋梁の架設に際しては、例えば、人家に近い側径間だけ防音壁やコンクリート床版の採用等の防音対策を施すことが試みられており、また、そのような計画案もいくつかある。その場合、吊橋は橋軸方向に変化した空力特性をもつことになり、耐風性の検討に際しては、3次元構造物として振動モード間の連成に留意する必要がある。本節では、局部的に複床構造となっている単床吊橋を想定して、空力特性が橋軸方向に変化することにより3次元構造物が被る耐風応答への影響を数値的に検討してみようとするものである。解析の対象とする吊橋はスパン  $\ell = 100\text{m}$ 、幅員  $2b = 3.6\text{m}$  の単径間吊橋で、断面形状は単床部で単翼断面、複床部で複翼断面であるとする。そのとき、吊橋断面の空気力係数として、単床部ではTheodorsenの空気力を作用させ、複床部ではTheodorsenの空気力を2倍した空気力を便宜的に使用する。吊橋の振動性状として、質量  $m = 42.41\text{kg} \cdot \text{S}^2/\text{m}^2$ 、慣性モーメント  $I_\alpha = 85.88\text{kg} \cdot \text{S}^2$ 、振動数は、たわみ1次  $0.234\text{Hz}$ 、2次  $0.159\text{Hz}$ 、3次

0.318 Hz, ねじれ1次0.443 Hz, 2次0.620 Hz, 3次0.951 Hz とし, 構造減衰は, たわみ, ねじれ共に  $\delta_h = \delta_a = 0$  とする。

図-4.12は, 単床吊橋と複床吊橋およびその中間的存在として部分的に複床式の単床吊橋の耐風性を調べたものである。吊橋断面形状の変化として (D-1) 全橋にわたって複床断面 (D-2) 中央部  $l/4$  だけ単床で他の部分は複床 (D-3) 支点側  $l/4$  だけ複床で他の部分は単床 (D-4) 支点側  $l/8$  だけ複床で他の部分は単床 (D-5) 全橋にわたって単床断面の5ケースを考慮して, 換算風速  $\bar{V}$  とねじれ対数減衰率  $\delta$  の関係について数値計算している。(D-5)の  $V-\delta$  曲線は, 図-4.5における (A-1) の  $V-\delta$  曲線と同一である。図-4.12より明らかなように吊橋断面形状の単床部と複床部の比率変化で  $V-\delta$  曲線の相互に対応する風速はほぼ平行移動していて, 当然のことながら, 複床部分が増加すると限界風速は低下する。単床吊橋における複床部の影響は (D-4) の支点側  $l/8$  までの範囲では耐風性への影響はわずかと認められるが (D-3) のように支点側から  $l/4$  の範囲に複床部が拡張されると急に空力特性が劣化してくる。本節における数値計算では, 複床部の空気力として, Theodorsen 空気力を2倍した空気力を使用しているが, これは相互に独立な2枚の単独翼に作用する空気力の和に相当して, 単独翼間の空力的な相互干渉を無視したものとなっている。したがって複床部に作用している空気力は厳密な意味において, 複翼の空気力と相違しているが, 吊橋断面の主構高が大きくて, 翼間距離が離れるとき, 翼相互の空力干渉は相対的に小さくなるものと思われる。<sup>14)</sup> ところで, この数値計算の特徴は, 吊橋の断面形状が橋軸方向に変化する事態に対応して, 空気力係数を断面形状の関数として, 式(2.21)に従って整理したことである。表-4.1と表-4.2に使用した空気力係数を示す。 $\gamma = 0$ が単床部(単翼)の空気力係数,  $\gamma = 1$ が複床部(複翼)の空気力係数を表わす。

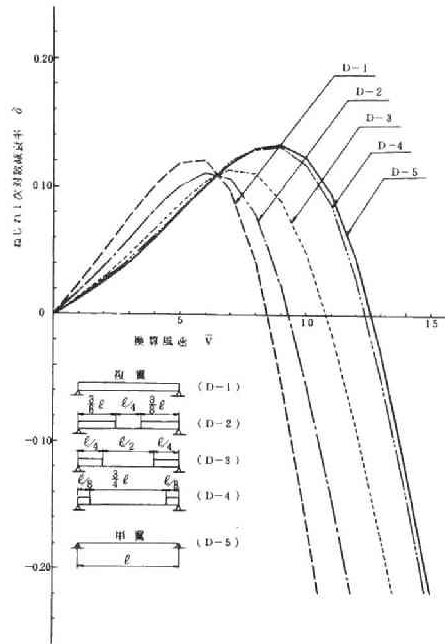


図-4.12 複翼と耐風性の関係

表-4.1 動的空気力係数 (揚力係数)

		1	$\bar{V}$	$\bar{V}^2$	$\bar{V}^3$	$\bar{V}^4$	$\bar{V}^5$
$L_{hR}$	1	0.5466 E-03	-0.1071 E-02	-0.2666 E-01	0.2454 E-02	-0.1112 E-03	0.2068 E-05
	$\gamma$	0.5466 E-03	-0.1071 E-02	-0.2666 E-01	0.2454 E-02	-0.1112 E-03	0.2058 E-05
$L_{hI}$	1	-0.2300 E-02	-0.3080 E 00	-0.9939 E-02	-0.5618 E-03	0.5968 E-04	-0.1505 E-05
	$\gamma$	-0.2300 E-02	-0.3080 E 00	-0.9939 E-02	-0.5618 E-03	0.5968 E-04	-0.1505 E-05
$L_{aR}$	1	0.2176 E-02	-0.1014 E-01	-0.1036 E 00	-0.4859 E-02	0.1002 E-03	-0.8408 E-06
	$\gamma$	0.2176 E-02	-0.1014 E-01	-0.1036 E 00	-0.4859 E-02	0.1002 E-03	-0.8408 E-06
$L_{aI}$	1	0.2885 E-02	-0.4888 E-00	0.7861 E-02	0.4541 E-02	-0.2669 E-03	0.5401 E-05
	$\gamma$	0.2885 E-02	-0.4888 E 00	0.7861 E-02	0.4541 E-02	-0.2669 E-03	0.5401 E-05

表-4.2 動的空気力係数 (空力モーメント係数)

		1	$\bar{V}$	$\bar{V}^2$	$\bar{V}^3$	$\bar{V}^4$	$\bar{V}^5$
$M_{hR}$	1	-0.2733 E-03	0.5357 E-03	0.1333 E-01	-0.1227 E-02	0.5560 E-04	-0.1029 E-05
	$\gamma$	-0.2733 E-03	0.5357 E-03	0.1333 E-01	-0.1227 E-02	0.5560 E-04	-0.1029 E-05
$M_{hI}$	1	0.1150 E-02	0.1540 E 00	0.4970 E-02	0.2809 E-03	-0.2984 E-04	0.7525 E-06
	$\gamma$	0.1150 E-02	0.1540 E 00	0.4970 E-02	0.2809 E-03	-0.2984 E-04	0.7525 E-06
$M_{aR}$	1	-0.1088 E-02	0.5070 E-02	0.5181 E-01	0.2180 E-02	-0.5010 E-04	0.4204 E-06
	$\gamma$	-0.1088 E-02	0.5070 E-02	0.5181 E-01	0.2180 E-02	-0.5010 E-04	0.4204 E-06
$M_{aI}$	1	-0.1417 E-02	-0.7417 E-01	-0.8980 E-02	-0.2271 E-02	0.1334 E-03	-0.2701 E-05
	$\gamma$	-0.1417 E-02	-0.7417 E-01	-0.8980 E-02	-0.2271 E-02	0.1334 E-03	-0.2701 E-05

単床吊橋が部分的に複床式となることによる耐風性の影響は、図-4.12に示すとおりであるが、そのとき振動モード間の連成がどうなっているか調べたのが図-4.13である。この図では、支点側から  $l/4$  の部分が複床式となった ( $D-3$ ) の場合を図示しているが、ねじれ1次振動分岐において、ねじれ3次との連成は微弱で、ねじれ1次振動モードとたわみ1次、3次振動モード間の連成振動が発現している。ちなみに各振動モードのねじれ1次振動分岐に対するエネルギー寄与率は  $\bar{V}=11.0$  において、たわみ1次-55.05%、たわみ3次-16.30%、ねじれ1次-28.64%、ねじれ3次-0.01%となっている。

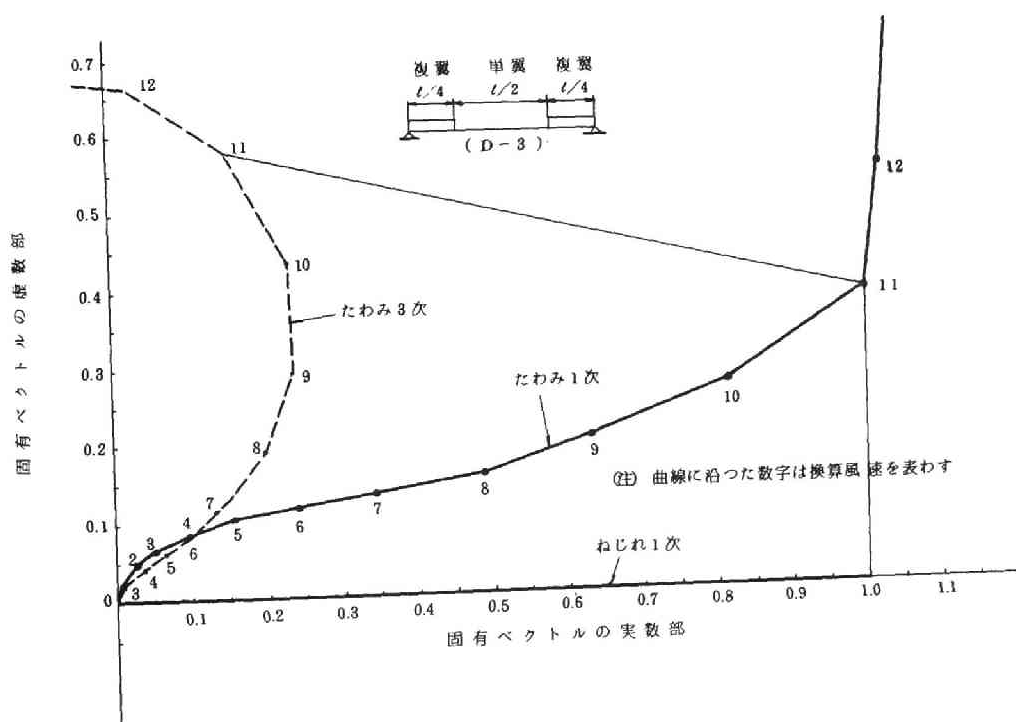


図-4.13 有風時における振動モード間の連成  
(ねじれ1次振動分岐)

#### 4.5 結 言

本章では非線形動的空気力を受ける 3 次元構造物の運動方程式を誘導した後、ねじれ 1 自由度、たわみ 1 自由度、たわみ・ねじれ 2 自由度の各場合について耐風解析法を検討した。解析では 1.3 の仮定(2)に基づいて、実際の非線形振動を散逸エネルギーが等価な線形振動系に置換している。3 次元構造物と 2 次元剛体の耐風応答の比較に関しては、吊橋等の 3 次元構造物の応答解析に 2 次元振動モデルを適用するに際して留意すべき前提条件を整理し、考慮すべき振動モードについて述べた。また、動的空気力係数の非線形性の面から、空気力係数が橋軸方向に変化する 3 次元構造物と空気力係数が一定な 2 次元剛体との耐風応答の相違点について考察した。さらに吊橋の 3 次元性を無視できない例として、気流特性が橋軸方向に変化する場合と構造物の空力特性が橋軸方向に変化する場合について、振動モード間の連成に留意しながら解析を行なった。以上の結果、次のことが明らかとなった。

- (1) 非線形動的空気力を受ける 3 次元構造物の応答を、本論文の手法によればエネルギー散逸が等価な線形振動系として、風速と振幅と対数減衰率の関係で容易に求めることができる。さらに、風速と振幅との関係に加えて、風の傾斜角や断面形状の関数として対数減衰率を考慮することもできる。
- (2) 3 次元構造物の耐風応答にバネ支持実験や Selberg の式などの 2 次元解析を適用できる必要十分条件は Lagrange の運動方程式における一般空気力の積分項に直交関係が成立することである。直交関係が成立するための十分条件は、例えば、固有振動モード間に直交関係が成立するだけでなく、気流特性と空力特性が橋軸方向に一定であることである。
- (3) 振幅の関数として動的空気力の非線形性に注目するとき、3 次元構造物の耐風応答は 2 次元剛体に比べて、振動モードに従って橋軸方向に空気力係数が変化する関係から、風速  $\bar{V}$  に対する対数減衰率の変化がゆるやかである。また、 $V-A-\delta$  曲線の形が  $\backslash$  型になっている場合、2 次元剛体の方が低風速側で発振する傾向にあり、 $/$  型になっている場合、3 次元構造物の方が低風速側で発振する傾向にある。
- (4) 3 次元構造物の振動に 2 次元解析を適用する際、考慮すべき振動モードは、たわみ振動とねじれ振動が相互に同次の振動モードであって、異なる振動次数間の連成を無視して耐風性を検討できる。ところが、(2)で述べたような 2 次元解析を適用できる前提条件が成立しない場合には、異なる振動次数間の連成を無視することはできず、構造物の 3 次元性に留意した解析を行なう必要がある。
- (5) 風速分布と吊橋の耐風性の関係は、風が吹きつける部分が少くなるにつれて、吊橋に作用する一般空気力が減少する関係から、 $V-\delta$  曲線のピーク値は縦軸方向に押しつぶされていくような変化をする。

- (6) 断面形状が翼形の単径間吊橋で支点側から  $l/4$  の部分だけに風が吹きつける場合、振動モード間の連成を考えると、ねじれ1次振動分岐のフラッター振動モードでは、ねじれ1次とたわみ3次の連成が卓越して発現する。また、エネルギー寄与率の概念を導入して5次以上の高次振動の影響を調べたところ、この場合、高次振動を無視しても実用上十分な精度で耐風性を検討できると判断された。
- (7) 単床吊橋における複床部の耐風性への影響は複床部の位置および全体に占める割合によって、非線形に変化する。例えば、支点側  $l/8$  までの範囲では耐風性への影響はわずかと認められるが、支点側から  $l/4$  の範囲に複床部が拡張されると空力特性は目立って悪くなる。



## 第 5 章 減衰器による 3 次元構造物の制振

### 5.1 概 説

構造物の動的な耐風性を向上させる方法として、現在、検討されている案を大別すると次のようになる。

- ① 構造物の断面形状を空力特性の良いものにする。
- ② 構造物の剛性を高める。
- ③ 構造物の減衰容量を高める。

従来の風洞実験による耐風設計は主に①の耐風上良好な断面形状を捜すことに主眼が置かれている。また、②の構造物の剛性に関しては、構造物の耐風上、最低限必要な剛性を確保するという意味で、例えば吊橋の場合ねじれ振動とたわみ振動の振動数比を 2.0 以上にするを目安にしている。③の構造物の減衰容量の調整に関しては、構造物の減衰特性がつかみにくいということと、減衰器の作動信頼性の面から、実際に適用された例は特殊な場合を除いてほとんどない。ところで、①の耐風上良好な断面を捜す手順は風洞実験に頼る必要があり、また、空力特性に重ね合せの原理が適用できないため、構造物の断面形状の多様性と相まって、対象とする構造物毎に風洞実験を実施して耐風性の検証をしているのが現状である。そのため、動的な耐風性の検討を必要とする吊橋や斜張橋の設計に際して風洞実験が一つの隘路となっていることは否めない。また、風洞実験に頼らないで吊橋等の構造物の耐風性を向上させるために剛性を高めるとした場合(②の方法)、鋼重の増加が著しく、実用上、考慮を要することが多い。

その際、減衰器を設置した場合の構造物の減衰容量を適確に把握し、実用上設置可能な減衰器を設計できるならば、風の動的な作用に対する構造物の安全性を確保することができるから、構造物の耐風設計上、不可欠とされている風洞実験の束縛からある程度解放されることができよう。もちろん、構造物の耐風設計において風洞実験による検討は欠かすことができないが、減衰容量を調整できるというキャスティング・ボートを握ることにより耐風設計に余裕をもって臨むことができる。特に、構造物の破壊には、すぐには結びつかないが、使用上支障があるカルマン渦等による限定振動の制振には、減衰器の使用が有効なのではないかと思われる。また、架設中の吊橋等の架設構造物は完成時に比べて剛性が低下して、耐風安定性の低下をまねいている。その対策として、例えば吊橋では、架設時の断面形を吹き抜け(トラスのみで床版なし)にしたり、耐風索を張りめぐらしたりしているが、もし、減衰器による減衰容量の向上で耐風安定性が保たれるならば床版の同時架設が可能となり架設作業がより安全にかつ容易に進められることが期待される。これらの意味で、減衰器による構造物の制振を検討することとする。減衰器を設置した 3 次元構造物の振動解析では複素振動モードの連成を無視することができないから、第 4 章で述べた 3 次元構造物における

Lagrange の運動方程式に減衰器による減衰力を新たに一般力として付加することによって解析を行なう。

## 5.2 減衰器による減衰力の一般力表示

3次元構造物の運動方程式を Lagrange の式から誘導するとき減衰器が構造物の運動方程式に及ぼす影響は減衰力の一般力として考慮される。

すなわち一般力としてたわみ減衰力  $F_k$  とねじれ減衰力  $T_k$  を考えるとき

$$\begin{aligned}\delta W'_j &= \int_\ell \left[ \sum_k F_k \delta h_k \delta(x-x_k) + \sum_k T_k \delta \alpha_k \delta(x-x_k) \right] dx \\ &= \sum_k F_k \eta_j(x_k) b \delta q_j + \sum_k T_k \varphi_j(x_k) \delta P_j\end{aligned}\quad (5.1)$$

ただし  $F_k$  ;  $x=x_k$  の点に作用するたわみ減衰力

$T_k$  ;  $x=x_k$  の点に作用するねじれ減衰力

$\delta(x-x_k)$  ; ディラックのデルタ関数

粘性減衰器の場合.

$$\left. \begin{aligned}F_k &= -C_{hk} \dot{h}_k = -C_{hk} \sum_i \eta_i(x_k) b \dot{q}_i \\ T_k &= -C_{\alpha k} \dot{\alpha}_k = -C_{\alpha k} \sum_i \varphi_i(x_k) \dot{P}_i\end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

ただし  $C_{hk}$  ;  $x=x_k$  の点にあるたわみ減衰器の減衰係数

$C_{\alpha k}$  ;  $x=x_k$  の点にあるねじれ減衰器の減衰係数

粘性減衰力の一般力表示は次のようになる

$$\begin{aligned}\delta W'_j &= -\sum_k C_{hk} \left\{ \sum_i \eta_i(x_k) \eta_j(x_k) \dot{q}_i \right\} b^2 \delta q_j \\ &\quad - \sum_k C_{\alpha k} \left\{ \sum_i \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \dot{P}_i \right\} \delta P_j\end{aligned}\quad (5.3)$$

動的吸振器の場合

$$\left. \begin{aligned}F_k &= -\widetilde{m}_k \ddot{H}_k = -\widetilde{m}_k b \ddot{\widetilde{H}}_k \\ T_k &= -\widetilde{I}_k \ddot{A}_k\end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ただし  $\widetilde{m}_k$  ;  $x=x_k$  にあるたわみ動的吸振器の質量

$\widetilde{I}_k$  ;  $x=x_k$  にあるねじれ動的吸振器の慣性モーメント

$H_k$  ;  $x=x_k$  にあるたわみ動的吸振器のたわみ変位

$A_k$  ;  $x=x_k$  にあるねじれ動的吸振器のねじれ変位  
動的吸振力の一般表示は次のようになる

$$\delta W_j' = - \sum_k \tilde{m}_k \ddot{H}_k \eta_j(x_k) b \delta q_j - \sum_k \tilde{I}_k \ddot{A}_k \varphi_j(x_k) \delta P_j \quad (5.5)$$

### 5.3 粘性減衰器による3次元構造物の制振<sup>1)~3)</sup>

粘性減衰器が設置された3次元構造物の気流中における運動方程式はラグランジェの式より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_j b^2 \ddot{q}_j + 2M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j b^2 + M_j \omega_{hj}^2 q_j b^2 \\ = \int_{\ell} L \eta_j b dx - \sum_r C_{hr} \left\{ \sum_k \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) \dot{q}_k \right\} b^2 \delta q_j \\ I_j \ddot{P}_j + 2I_j \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{P}_j + I_j \omega_{aj}^2 P_j \\ = \int_{\ell} M \varphi_j dx - \sum_r C_{ar} \left\{ \sum_k \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) \dot{P}_k \right\} \delta P_j \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j \\ = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k + \sum_k (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) P_k \right\} \\ - \sum_r \frac{C_{hr}}{M_j} \left\{ \sum_k \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) \dot{q}_k \right\} S_{hrk} \\ \ddot{P}_j + 2\zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{P}_j + \omega_{aj}^2 P_j \\ = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) q_k + \sum_k (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) P_k \right\} \\ - \sum_r \frac{C_{ar}}{I_j} \left\{ \sum_k \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) \dot{P}_k \right\} S_{ark} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

ただし  $S_{hrk}$  ;  $x=x_r$  におけるたわみ減衰器のたわみ  $K$  次振動に対する作動補正係数

$S_{ark}$  ;  $x=x_r$  におけるねじれ減衰器のねじれ  $K$  次振動に対する作動補正係数  
式(5.7)における右辺第2項が粘性減衰器による減衰力の項である。

ここで  $q_j = \bar{q}_j e^{zt}$  ,  $P_j = \bar{P}_j e^{zt}$  とするとき式(5.7)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& (Z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}Z + \omega_{hj}^2) \bar{q}_j \\
& = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \bar{p}_k \right\} \\
& \quad - \sum_r \frac{C_{hr}}{M_j} \left\{ \sum_k \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) \bar{q}_k \right\} S_{hrk} Z \\
& (Z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}Z + \omega_{aj}^2) \bar{p}_j \\
& = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \bar{p}_k \right\} \\
& \quad - \sum_r \frac{C_{ar}}{I_j} \left\{ \sum_k \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) \bar{p}_k \right\} S_{ark} Z
\end{aligned} \tag{5.8}$$

行列式表示すると、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & B_{11} & B_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & B_{21} & B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ C_{11} & C_{12} & \cdots & D_{11} & D_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & D_{21} & D_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
A_{jk} &= (Z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}Z + \omega_{hj}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\mu_j} (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \\
& \quad + \sum_r \frac{C_{hr}}{M_j} \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) S_{hrk} Z \\
B_{jk} &= -\frac{\omega^2}{\mu_j} (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \\
C_{jk} &= -\frac{\omega^2}{\nu_j} (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \\
D_{jk} &= (Z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}Z + \omega_{aj}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\nu_j} (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \\
& \quad + \sum_r \frac{C_{ar}}{I_j} \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) S_{ark} Z
\end{aligned} \tag{5.10}$$

粘性減衰器による構造物の耐風性の向上がどの程度期待されるか調べるために、架設中の吊橋を想定して数値計算を行なう。解析の対象とする吊橋は、スパン  $\ell = 100\text{ m}$ 、幅員  $2b = 3.6\text{ m}$  の単径間吊橋で断面形状は翼形とする。振動数はたわみ 1 次  $0.234\text{ Hz}$ 、2 次  $0.159\text{ Hz}$ 、3 次  $0.318\text{ Hz}$ 、ねじれ 1 次  $0.443\text{ Hz}$ 、2 次  $0.620\text{ Hz}$ 、3 次  $0.951\text{ Hz}$  とし、構造減衰はたわみ、ねじれ共に  $\delta_h = \delta_\alpha = 0$  とする。支点側から  $\ell/4$  までの部分の質量  $m_0 = 4241\text{ kg} \cdot \text{S}^2/\text{m}^2$ 、慣性モーメント  $I_0 = 85.88\text{ kg} \cdot \text{S}^2$ 、中央部  $\ell/2$  の部分の質量  $m = 0.33m_0$ 、慣性モーメント  $I = 0.50I_0$  とし、風は支点側から  $\ell/4$  の部分だけに作用するとする。この振動モデルの耐風性は、質量分布と耐風性の関係を調べた図-4.11 の  $V-\delta$  曲線 (B-2) と一致している。ねじれ粘性減衰器を支点両端から  $\ell/4$  の位置に 1 台ずつ設置したときの吊橋の耐風性を図-5.1 に示す。粘性減衰器の減衰係数  $C_\alpha$  として、(C-1)  $C_\alpha = 0.0$ 、(C-2)  $C_\alpha = 20\text{ kg} \cdot \text{S}$ 、(C-3)  $C_\alpha = 50\text{ kg} \cdot \text{S}$  の 3 ケースについて換算風速とねじれ 1 次対数減衰率の関係を図示したものである。この場合、気流による複素振動モードの連成効果を考慮すると粘性減衰器による付加減衰率は風速によって変化することが予想されたが、図-5.1 より明らかなように無風時における付加減衰分だけ  $V-\delta$  曲線は 0 シフトして縦軸方向に平行移動している。付加減衰による  $V-\delta$  曲線の変化の様子は図-3.3 に示す 2 次元剛体における付加減衰の影響と同様である。ねじれ減衰器の設置による 3 次元性の効果がほとんど発現していない原因として、すでに、4.4.3 でも述べたように、ねじれ振動同志 (この場合はねじれ 1 次と 3 次) の連成が非常に弱いために、ねじれ減衰器によって、ねじれ 1 次振動に付加される減衰力がそのまま吊橋系全体に付加される減衰力に対応していることによると考えられる。

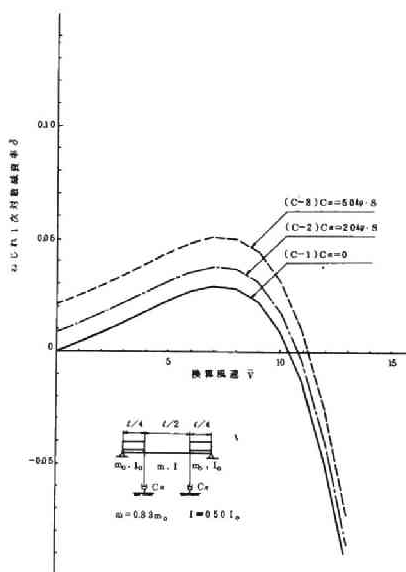


図-5.1 粘性減衰器と耐風性の関係

#### 5.4 動的吸振器による 3 次元構造物の制振<sup>4) 5)</sup>

動的吸振器が設置された 3 次元構造物の気流中におけるたわみ、ねじれ運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_j \ddot{b}^2 \ddot{q}_j + 2M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j \dot{b}^2 + M_j \omega_{hj}^2 q_j \dot{b}^2 = \int_{\ell} L \eta_j b dx - \sum_r \tilde{m}_r \ddot{H}_r \eta_j (x_r) \dot{b}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$I_j \ddot{P}_j + 2 I_j \zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} \dot{P}_j + I_j \omega_{\alpha j}^2 P_j = \int_{\ell} M \varphi_j d\mathbf{x} - \sum_r \tilde{I}_r \ddot{A}_r \varphi_j(\mathbf{x}_r) \quad \left. \vphantom{\int_{\ell} M \varphi_j d\mathbf{x}} \right\}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{q}_j + 2 \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j \\ &= \frac{\omega_j^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + i L_{hIjk}) q_k + \sum_k (L_{\alpha Rjk} + i L_{\alpha Ijk}) P_k \right\} \\ & \quad - \sum_r \frac{\tilde{m}_r}{M_j} \eta_j(\mathbf{x}_r) \ddot{H}_r \\ & \ddot{P}_j + 2 \zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} \dot{P}_j + \omega_{\alpha j}^2 P_j \\ &= \frac{\omega_j^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + i M_{hIjk}) q_k + \sum_k (M_{\alpha Rjk} + i M_{\alpha Ijk}) P_k \right\} \\ & \quad - \sum_r \frac{\tilde{I}_r}{I_j} \varphi_j(\mathbf{x}_r) \ddot{A}_r \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

式(5.12)における右边第2項が動的吸収器による項である。また、動的吸振器の運動方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{H}_r &= 2 \tilde{\zeta}_{hr} \tilde{\omega}_{hr} (\dot{h} - \dot{H}_r) + \tilde{\omega}_{hr}^2 (\bar{h} - \bar{H}_r) \\ &= 2 \tilde{\zeta}_{hr} \tilde{\omega}_{hr} \left( \sum_k \eta_k(\mathbf{x}_r) \dot{q}_k - \dot{H}_r \right) + \tilde{\omega}_{hr}^2 \left( \sum_k \eta_k(\mathbf{x}_r) q_k - \bar{H}_r \right) \\ A_r &= 2 \tilde{\zeta}_{\alpha r} \tilde{\omega}_{\alpha r} (\dot{\alpha} - \dot{A}_r) + \tilde{\omega}_{\alpha r}^2 (\bar{\alpha} - \bar{A}_r) \\ &= 2 \tilde{\zeta}_{\alpha r} \tilde{\omega}_{\alpha r} \left( \sum_k \varphi_k(\mathbf{x}_r) \dot{P}_k - \dot{A}_r \right) + \tilde{\omega}_{\alpha r}^2 \left( \sum_k \varphi_k(\mathbf{x}_r) P_k - \bar{A}_r \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

そこで  $q_j = \bar{q}_j e^{zt}$ ,  $P_j = \bar{P}_j e^{zt}$ ,  $\bar{H}_r = \bar{h}_r e^{zt}$ ,  $\bar{A}_r = \bar{a}_r e^{zt}$

とすると、式(5.12)(5.13)は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & (Z^2 + 2 \zeta_{hj} \omega_{hj} Z + \omega_{hj}^2) \bar{q}_j \\ &= \frac{\omega_j^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + i L_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (L_{\alpha Rjk} + i L_{\alpha Ijk}) \bar{P}_k \right\} \\ & \quad - \sum_r \frac{\tilde{m}_r}{M_j} \eta_j(\mathbf{x}_r) \bar{h}_r Z^2 \\ & (Z^2 + 2 \zeta_{\alpha j} \omega_{\alpha j} Z + \omega_{\alpha j}^2) \bar{P}_j \\ &= \frac{\omega_j^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + i M_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (M_{\alpha Rjk} + i M_{\alpha Ijk}) \bar{P}_k \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

式(5.14)を行列表示する

$$\begin{aligned}
A_{jk} &= (Z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}Z + \omega_{hj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega_j^2}{\mu_j}(L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \\
B_{jk} &= -\frac{\omega_j^2}{\mu_j}(L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \\
C_{jk} &= -\frac{\omega_j^2}{\nu_j}(M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \\
D_{jk} &= (Z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}Z + \omega_{aj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega_j^2}{\nu_j}(M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \\
E_{jr} &= \frac{\tilde{m}_r}{M_j}\eta_j(\mathbf{x}_r)Z^2 \quad (r = 1 \dots \ell) \\
F_{js} &= \frac{\tilde{I}_s}{I_j}\varphi_j(\mathbf{x}_s)Z^2 \quad (s = 1 \dots m) \\
G_{ri} &= -(2\tilde{\zeta}_{hr}\tilde{\omega}_{hr}Z + \tilde{\omega}_{hr}^2)\eta_i(\mathbf{x}_r)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$H_{sj} = - (2\tilde{\zeta}_{\alpha s} \tilde{\omega}_{\alpha s} Z + \tilde{\omega}_{\alpha s}^2) \varphi_k(x_s)$$

$$I_{rs} = (Z^2 + 2\tilde{\zeta}_{hr} \tilde{\omega}_{hr} Z + \tilde{\omega}_{hr}^2) \delta_{rs}$$

$$K_{rs} = (Z^2 + 2\tilde{\zeta}_{\alpha s} \tilde{\omega}_{\alpha s} Z + \tilde{\omega}_{\alpha s}^2) \delta_{rs}$$

動的吸振器による構造物の耐風性の影響を調べたのが図-5.2である。解析の対象とした構造物は4.4.2の断面形状が翼形の単径間吊橋と同一であるが、中央点  $l/2$  の位置にねじれ振動用の動的吸振器1台が設置されている。動的吸振器の振動特性は慣性モーメント  $\tilde{I} = 5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ 、ねじれ減衰定数  $\tilde{\zeta} = C/2\sqrt{km} = 0.2$ 、ねじれ振動数  $\tilde{N} = 0.443 \text{ Hz}$  とする。図-5.2において実線が減衰器なしの状態、点線が動的吸振器を設置した状態での  $V-\delta$  曲線である。一点鎖線は動的吸振器の代わりに粘性減衰器を参考までに設置した場合で、減衰器の減衰係数は  $C\alpha = 50 \text{ kg} \cdot \text{s}$  であるとする。粘性減衰器の影響は5.3で述べたように風速にかかわらず無風時の付加減衰率がそのまま  $V-\delta$  曲線に重ね合せられている。それに対して、動的吸振器による減衰効果は低風速において認められるが、空力減衰が正の極大値から負に向って減少を始めると急に減衰効果を低下させてフラッター限界風速の向上にはほとんど役立っていない。その原因を減衰器の作動性の面から分析したのが図-5.3である。縦軸にねじれ1次振動分岐の連成振動数と動的吸振器の位相角と振幅  $(\bar{a}_1/\bar{P}_1)$  をとり横軸に換算風速をとっている。動的吸振器の固有振動数はねじれ1次固有振動数と一致させているか

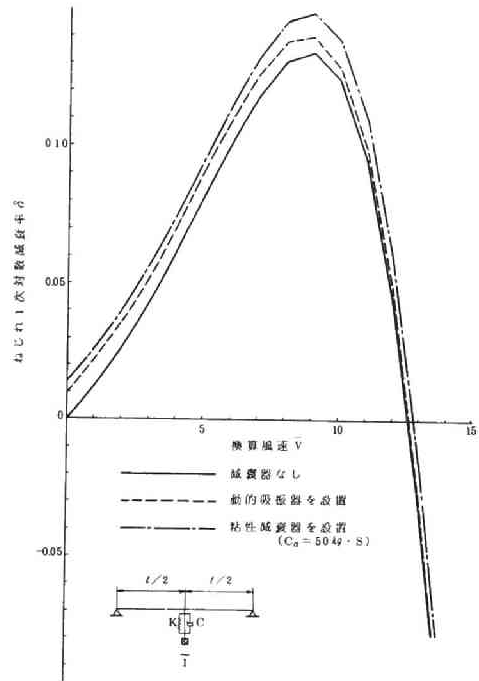


図-5.2 動的吸振器と耐風性の関係

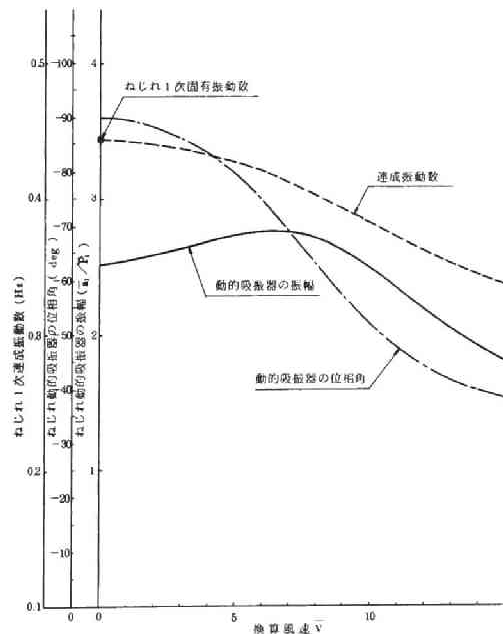


図-5.3 動的吸振器の作動性



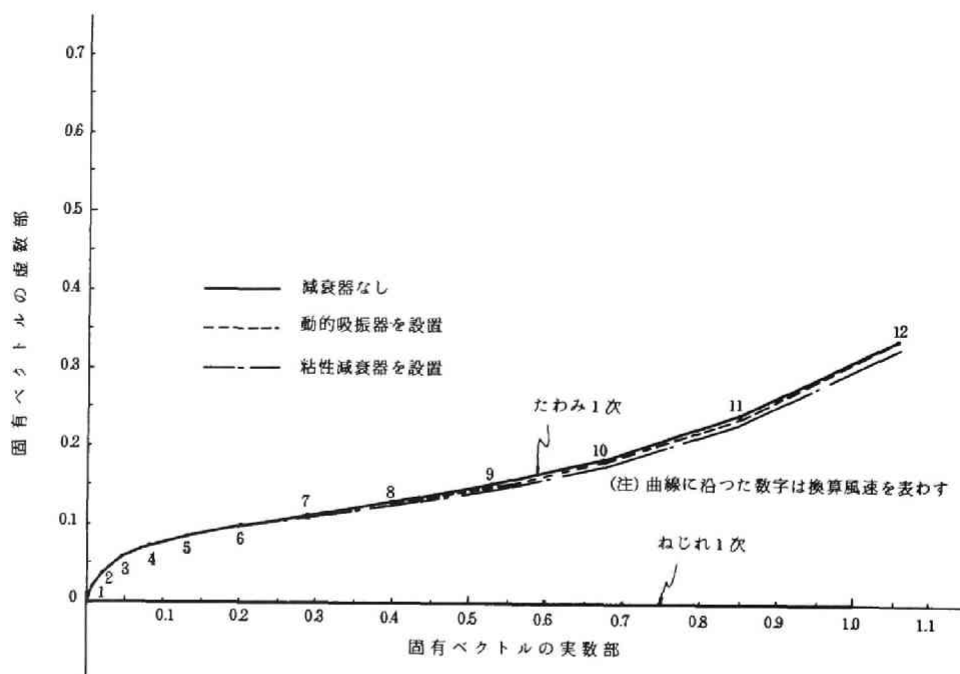


図-5.4 有風時における振動モード間の連成

ら風速が高くなるにつれて、ねじれ1次振動分岐の連成振動数は動的吸振器の固有振動数から離れていき、動的吸振器の振幅は低下している。さらに吊橋のねじれ1次振動と動的吸振器との位相角は無風時の $-8.9^\circ$ から $\bar{V}=14.0$ の $-40^\circ$ へと変化している。したがって、動的吸振器の振幅( $\bar{a}_1/\bar{P}_1$ )の低下と相まって、吊橋の振動と動的吸振器の間の位相角の短縮によって、動的吸振器が吊橋に働きかける仕事量が低下することが動的吸振器の作動性低下の原因と考えられる。

図-5.4は有風時におけるねじれ1次振動分岐の振動モードを複素ベクトル表示したものである。図より明らかなように減衰器の有無にかかわらず連成振動モードはほぼ一定である。ところでこの振動モデルで減衰器がない場合には、4.3.2で述べたように3次元構造物のフラッタ解析に2次元解析を適用できる。すなわち、ねじれ1次振動の耐風性の検討に際して、振動モードとしては、たわみ1次振動とねじれ1次振動だけを考慮すればよい。それが減衰器の設置によって理屈の上では異なる振動次数間の振動モードの連成が問題となるはずであるが、この場合には、減衰器の容量が小さいためか高次振動の影響はほとんど認められない。

## 5.5 粘性減衰器と動的吸振器による吊橋の制振

粘性減衰器と動的吸振器が設置された3次元構造物の気流中におけるたわみ、ねじれ運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j \\
& = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k + \sum_k (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) P_k \right\} \\
& \quad - \sum_r \frac{C_{hr}}{M_j} \left\{ \sum_k \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) \dot{q}_k \right\} S_{hrk} - \sum_s \frac{\tilde{m}_s}{M_j} \eta_j(x_r) \ddot{H}_s \\
& \ddot{P}_j + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}\dot{P}_j + \omega_{aj}^2 P_j \\
& = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) q_k + \sum_k (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) P_k \right\} \\
& \quad - \sum_k \frac{C_{ar}}{I_j} \left\{ \sum_k \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) \dot{P}_k \right\} S_{ark} - \sum_s \frac{\tilde{I}_s}{I_j} \varphi_j(x_s) \ddot{A}_s \\
& \ddot{H}_s = 2\tilde{\zeta}_{hs}\tilde{\omega}_{hs} \left( \sum_k \eta_k(x_s) \dot{q}_k - \dot{\bar{H}}_s \right) + \tilde{\omega}_{hs}^2 \left( \sum_k \eta_k(x_s) q_k - \bar{H}_s \right) \\
& \ddot{A}_s = 2\tilde{\zeta}_{as}\tilde{\omega}_{as} \left( \sum_k \varphi_k(x_s) \dot{P}_k - \dot{\bar{A}}_s \right) + \tilde{\omega}_{as}^2 \left( \sum_k \varphi_k(x_s) P_k - \bar{A}_s \right) \right\} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

式(5.17)の第1式は吊橋のたわみ振動，第2式は吊橋のねじれ振動を表わし，第3式はたわみ用動的吸振器，第4式はねじれ用動的吸振器の振動を表わしている。

$$\begin{aligned}
& \text{ここで， } q_j = \bar{q}_j e^{zt}, \quad P_j = \bar{P}_j e^{zt}, \quad \bar{H}_s = \bar{h}_s e^{zt}, \quad \bar{A}_s = \bar{a}_s e^{zt} \\
& \text{とするとき，式(5.17)は次式のようになる。} \\
& (Z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}Z + \omega_{hj}^2) \bar{q}_j \\
& = \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \bar{P}_k \right\} \\
& \quad - \sum_r \frac{C_{hr}}{M_j} \left\{ \sum_k \eta_k(x_r) \eta_j(x_r) \bar{q}_k \right\} S_{hrk} Z - \sum_s \frac{\tilde{m}_s}{M_j} \eta_j(x_s) \bar{h}_s Z^2 \\
& (Z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}Z + \omega_{aj}^2) \bar{P}_j \\
& = \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \bar{q}_k + \sum_k (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \bar{P}_k \right\} \\
& \quad - \sum_k \frac{C_{ar}}{I_j} \left\{ \sum_k \varphi_k(x_r) \varphi_j(x_r) \bar{P}_k \right\} S_{ark} Z - \sum_s \frac{\tilde{I}_s}{I_j} \varphi_j(x_s) \bar{a}_s Z^2 \\
& \bar{h}_s Z^2 + (\bar{h}_s - \sum_k \eta_k(x_s) \bar{q}_k) (2\tilde{\zeta}_{hs}\tilde{\omega}_{hs}Z + \tilde{\omega}_{hs}^2) = 0 \\
& \bar{a}_s Z^2 + (\bar{a}_s - \sum_k \varphi_k(x_s) \bar{P}_k) (2\tilde{\zeta}_{as}\tilde{\omega}_{as}Z + \tilde{\omega}_{as}^2) = 0 \quad (5.1)
\end{aligned}$$

ただし  $\zeta_{hj}, \omega_{hj}$  ; たわみ  $j$  次振動の減衰定数と固有円振動数

$\zeta_{aj}, \omega_{aj}$  ; ねじれ  $j$  次振動の減衰定数と固有円振動数

$$\mu_j = M_j / (\pi \rho b^2 \ell) \quad , \quad \nu_j = I_j / (\pi \rho b^4 \ell)$$

$$M_j = \int_{\ell} m \eta_j^2 dx \quad , \quad I_j = \int_{\ell} I_{\alpha} \varphi_j^2 dx$$

$C_{hr}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$  にあるたわみ粘性減衰器の減衰係数

$C_{\alpha r}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$  にあるねじれ粘性減衰器の減衰係数

$S_{hrk}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$  にあるたわみ粘性減衰器のたわみ  $K$  次振動に対する作動補正係数

$S_{\alpha rk}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$  にあるねじれ粘性減衰器のねじれ  $K$  次振動に対する作動補正係数

$\tilde{\zeta}_{hs}, \tilde{\omega}_{hs}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$  にあるたわみ動的吸振器の減衰定数と固有円振動数

$\tilde{\zeta}_{\alpha s}, \tilde{\omega}_{\alpha s}$  ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$  にあるねじれ動的吸振器の減衰定数と固有円振動数

## 5.6 結 言

本章では Lagrange の運動方程式において減衰力を一般力表示して、粘性減衰器と動的吸振器が3次元構造物に及ぼす影響を考慮した。その後、粘性減衰器と動的吸振器の設置による耐風上の影響を数値計算によって調べた。以上の結果次のことが明らかとなった。

(1) 粘性減衰器と動的吸振器などにおける減衰力の一般力は異なる振動モードの和で表示されるから、理論的には振動モード間の連成を必然的に考慮する必要がでてくる。ただし、本章の数値計算におけるような減衰器の減衰容量程度では、減衰器の影響による振動モード間の連成効果が減衰器の減衰容量に及ぼす影響は微小で実用上無視できる。

(2) 粘性減衰器が3次元構造物の耐風性に与える影響は、風速にかかわらず、無風時の付加減衰をそのまま  $V-\delta$  曲線に重ね合わせて付加減衰分だけ  $V-\delta$  曲線を縦軸方向に平行移動させたものとなっている。

(3) 動的吸振器が3次元構造物の耐風性に与える影響は、構造物の連成振動数と動的吸振器の固有振動数との関係で左右され、連成振動数と動的吸振器の固有振動数が離れると、動的吸振器の位相角と振幅の関係から減衰容量が低下する。

(4) 粘性減衰器や動的吸振器などの減衰器によって構造物の減衰容量を高めて耐風性を向上させる方法を採用する場合、留意すべき点は限界風速近傍で  $V-\delta$  曲線の勾配がきつい特性を示す図-5.2のような構造物のときには、付加減衰による限界風速の向上はわずかで耐風性の改善に余り役立たないことである。それに対して、限界風速近辺における  $V-\delta$  曲線の勾配が図-5.1に示すようにゆるやかな場合には、減衰器の設置が有効と思われる。また、カルマン渦等による限定振動は、一般に構造物の減衰容量によって発現形態が左右されるから、付加減衰による耐風性の向上が大いに望めるところと考えられる。

## 第 6 章 結 論

本論文は、吊橋の耐風設計において重要な位置を占めているバネ支持実験を焦点にして、2次元風洞実験の工学的意義の考察を行なって、バネ支持実験の有機的な活用を検討したものである。

その過程でバネ支持実験から非線形動的空気力係数を  $V-A-\delta$  曲線との関連において算出する方法を提案した。非線形動的空気力を受ける構造物の応答は非線形振動となるが、それを散逸エネルギーが等価な線形振動系に置換して、2次元剛体と3次元構造物の応答解析を行なった。2次元剛体の耐風応答は、風洞実験におけるバネ支持実験に対応するものであり、振動条件と2次元剛体の耐風性の関係を調べることで、実験条件の影響を受けるバネ支持実験結果の評価について理論的考察を加えた。また、2次元剛体の振動と3次元構造物の振動とは、振動モードの点から自ずと異なるものであり、両者の関係を耐風性の面から検討した。以上の検討の結果、バネ支持実験から、3次元構造物の耐風性のある程度適確に推定することができるようになったが、さらに3次元構造物の耐風性向上のために、減衰器の設置による構造物の減衰容量の調整について試算を行なった。

以下に、本研究を通じて明らかになったことを要約するとともに今後の問題点を述べて結論とする。

第1章では、現在に至るまでの吊橋の風洞実験による耐風性の研究を概説するとともに、本研究の内容を紹介し、本研究の方向と位置付けを明らかにした。

第2章では、動的空気力係数の表示法として実数部と虚数部に分離した表示法 (I) と変位成分と速度成分に分離した表示法 (II) について相互の関係を整理したが、動的空気力の無次元化表示が簡明であり、また、実数部と虚数部にはっきりと分離されている表示法 (I) を本論文で採用することを述べた。また、動的空気力係数が換算風速以外に振幅と風の傾斜角さらに断面形状等の非線形な影響を受けていることを考慮して、それら非線形要因の多変数関数として最小自乗法により多項近似する表現法を記述した。その後、たわみ・ねじれ2自由度振動を対象とした非線形動的空気力係数を表示法 (I) に従って定常振動だけでなく、減衰・発散振動を考慮して算出する手法を提示した。本論文の算出式の妥当性を検討するために、たわみ・ねじれ2自由度振動における動的空気力係数の算出式を提案した R. H. Scanlan と Ali Sabzevari の式と比較してみると、空気力算出式的前提条件において本論文の方がより一般的であることが明らかとなった。また、動的空気力係数の算出に際しての誤差を分析してみると、対数減衰率の測定精度が空気力係数  $L_{hI}$  と  $M_{\alpha I}$  の精度を左右し、振動数比の測定精度が  $L_{hI}$  と  $M_{\alpha I}$  以外の空気力係数の精度と密接な関係にあること、連成空気力係数において、たわみ振動とねじれ振動の位相差が定常振動時だけでなく、減衰振動時にも重要な因子となることが判明した。以上、要するにバネ支持実験を活用した自由振動法の立場から、吊橋の空力特性と結びついた動的空気力係数をいかに適確に表現し、算出するかと

いうことについて検討した。

第3章では、非線形動的空気力を受ける2次元剛体の耐風応答解析に際して、対数減衰率に着目して対数減衰率を風速と振幅さらに必要に応じて、風の傾斜角や断面形状との関係において解析する手法を明らかにした。さらに、動的空気力係数から算出される対数減衰率と連成振動数を使って、構造物の耐風応答を振幅および発振時間との関係で追跡する試みを提示した。次に振動条件が2次元剛体の耐風応答に与える影響について述べると、構造減衰の影響は対数減衰率の重ね合わせが実用上許容されること、質量、慣性モーメントの影響は振動1自由度の場合、空力減衰と反比例の関係にあること、振動数の影響は振動数比を通して換算風速と対数減衰率の関係を決定することが明らかとなった。また、たわみ振幅が動的空気力係数に及ぼす影響が微小と認められるとき、たわみ・ねじれ2自由度振動の実験結果をみかけ上ねじれ1自由度振動として扱うことができることを理論的に裏付けた。さらに、たわみ・ねじれ振動の連成空気力係数  $L\alpha_R$ ,  $L\alpha_I$ ,  $M_{hR}$ ,  $M_{hI}$  を耐風解析においてP、Qの2個に集約でき、その段階において実験誤差の入り易い位相差を用いる必要のないことを明らかにした。以上、本章においては2次元剛体の耐風応答について風洞実験におけるパネ支持実験と視点を重複させながら応答特性を解析した。また、本章は第4章で検討する3次元構造物の応答解析の特殊なケースとして位置づけすることができる。

第4章では、非線形動的空気力を受ける3次元構造物の運動方程式を誘導し、耐風応答について対数減衰率と風速と振幅さらに風の傾斜角や断面形状との関係で検討できることを明らかにした。3次元構造物と2次元剛体の耐風応答の比較に関して、Lagrange の運動方程式における一般空気力の積分項に直交関係が成立することが3次元構造物の耐風応答に2次元解析を適用できる必要十分条件であること、2次元解析に際して考慮すべき振動モードはたわみ振動とねじれ振動が相互に同次の振動モードであって異なる振動次数間の連成を無視できること、2次元解析を適用できる十分条件が成立しない場合には異なる振動次数間の連成を無視することができず、構造物の3次元性に留意した解析を行なう必要があることを明示した。また、動的空気力係数の非線形性の面から、空気力係数が振動モードに従って橋軸方向に変化する3次元構造物と空気力係数が一定な2次元剛体との耐風応答の相違点について考察を加えて、3次元構造物の耐風応答は2次元剛体に比べて風速に対する対数減衰率の変化がゆるやかであること、 $V-A-\delta$  曲線の形が  $\backslash$  型の場合は2次元剛体の方が低風速側で発振し、 $/$  型の場合は3次元構造物の方が低風速側で発振する傾向にあることを提起した。さらに、吊橋の3次元性を無視できない例として気流特性が橋軸方向に変化する場合と構造物の空力特性が橋軸方向に変化する場合について数値解析を行なった結果、場合によっては異なる振動次数間の連成が同じ振動次数の連成より卓越して発現することが確認されたが、考慮すべき振動モードとしてエネルギー寄与率の面から高次振動（例えば5次以上）を無視しても実用上十分な精度で耐風性を検討できることを明らかにした。以上、本章では、2次元剛体と3次元構造物の

耐風性の相違点を振動モードの面から明確にし、2次元剛体であるバネ支持実験から3次元構造物である実際の構造物の耐風性の検討をするに際して、耐風設計者に明確な指針を与えることを目的とした。

第5章では、粘性減衰器と動的吸振器などの減衰器が3次元構造物に及ぼす減衰力の影響をLagrangeの方程式における一般力の形で考慮して、減衰器の設置による耐風上の影響を数値的に明らかにした。すなわち、減衰器による減衰力の付加は、理論上、振動モード間の連成を誘発するが、本章で考慮した程度の付加減衰では減衰器の影響による振動モード間の連成効果を無視できること、粘性減衰器の影響は付加減衰について対数減衰率の重ね合わせが実用上許容されること、動的吸振器の影響は構造物の連成振動数と動的吸振器の固有振動数が接近した場合だけ有効で、離散すると減衰効果が低下することである。さらに、 $V-\delta$ 曲線の勾配が限界風速近傍で急な特性を示す構造物のときには、付加減衰による限界風速の向上はわずかで耐風上の改善を余り期待できないことを注意事項として提起した。以上、本章では、第4章までの検討で3次元構造物の耐風応答を解析できることを踏まえて、減衰器による3次元構造物の減衰容量の向上とその影響を検討した。

以上のような成果が得られたが、今後さらに検討していくべき課題としては、構造物に作用する気流が本研究で仮定した整流ではなくて風の乱れを含んだ自然風の場合、2次元振動実験の結果と3次元構造物の耐風性の関係がどうなるかという問題がある。また、構造物の振動自由度として、本研究ではたわみ振動とねじれ振動の2方向に限定したが、さらに、横たわみ振動との連成を加味した耐風性の検討が残されている。気流の作用を受ける構造物の振幅と到達所要時間との関係から構造物の疲労強度あるいは供用可能振幅に対して信頼性の立場から合理的設計を進めると、無風時における空気力係数をどう評価するかということ、定常振動を対象とした強制振動法による空気力係数と減衰振動（定常振動を含む）を対象とした自由振動法による空気力係数との関係、実用的な減衰器に対する具体的検討など残された課題である。

なお、本論文の数値計算は川崎重工業㈱情報システム部のIBM 370-168を使用したことを付記する。

最後に本研究を遂行するに当って終始御指導と御鞭撻を賜った京都大学名誉教授小西一郎先生に心からの感謝の意を表するとともに、本論文の作成全般にわたって御懇切な御指導と御教示をいただいた京都大学教授白石成人先生に深く感謝する次第である。また、研究内容について貴重な御助言と御討議をいただいた京都大学助教授松本勝先生、建設省土木研究所構造研究室長成田信之氏、本州四国連絡橋公団榎波義幸氏に深甚な謝意を表する。

社内での研究に際しては、御理解と御便宜を計っていただいた川崎重工業㈱理事大宮克巳氏、川崎重工業㈱本四連絡橋室部長深田俊雄氏、川崎重工業㈱本四連絡橋室部長繁戸武一氏、また研究実施の上で貴重な御助言と御鞭撻をいただいた川崎重工業㈱技術研究所機械研究室長船川正哉氏、川崎重工業㈱本四連絡橋室佐岡暖也氏に深く謝意を表する次第である。本論文の数値計算に際しては川崎重工業㈱加古川工場電算室の方々から多大の御援助をいただいた。ここに記して御礼申し上げる次第である。



## 参 考 文 献

### 第 1 章 参 考 文 献

- 1) 土木学会・本州四国連絡橋耐風研究小委員会編：本州四国連絡橋の耐風に関する調査研究報告書，昭和50年
- 2) Farquharson, F.B., Smith, F.C., and Vincent, G.S. : Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Parts 1-5, Structural Research Laboratory, University of Washington, Seattle, Wash., 1949-1954
- 3) Scruton, C. : Experimental Investigation of Aerodynamic Stability of Suspension Bridges with Special Reference to Proposed Severn Bridge, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol. 1, Part 1, No. 2, Mar., 1952
- 4) Selberg, A. : Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Acta Polytechnica Scandinavica, No. 308, Stockholm, 1961
- 5) 平井敦：若戸吊橋の耐風安定性に関する実験的研究，東大報告，1960-1
- 6) Ukeguchi, N., Sakata, H. and Nishitani, H. : An Investigation of Aeroelastic Instability of Suspension Bridges, Symposium on Suspension Bridges, Lisbon, Nov. 1966
- 7) 田中，伊藤：充腹構造物の自励振動における空気力の特性，土木学会論文報告集，No. 168，1969-8
- 8) 溝田，中村：矩形断面柱の非定常揚力と後流の速度変動について，構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集，1974-12
- 9) 成田，横山，伊藤：斜張橋断面の空力特性（その1），構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集，1974-12
- 10) Scanlan, R.H. and Sabzevari, A. : Suspension Bridge Flutter Revisited, ASCE Structural Engineering Conference / Seattle, Washington, May, 1967
- 11) 白石成人：平板状構造物の曲げねじれフラッター特性に関する基礎的考察，土木学会論文報告集，No. 186，1971-2
- 12) 中村，溝田：ある箱型構造物の空力弾性的特性について，構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集，1972-12
- 13) 白木，福沢，田中，松井：長大つり橋補剛げた架設時の耐風安定性，三菱重工技報，Vol. 7，No. 7，1970
- 14) 久保，宮田，伊藤：吊橋系の空力弾性振動の部分，全体模型による風洞実験について，構造物

の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集, 1974-12

- 15) 倉西, 高橋: ダンパーをもつはりのたわみ振動, 土木学会論文報告集, №187, 1971-3
- 16) Murata, M. and Ito, M. : Suppression of Wind-Induced Vibration of a Suspension Bridge by Means of a Gyroscope, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971
- 17) Wardlaw, R.L. : Some Approaches for Improving the Aerodynamic Stability of Bridge Road Decks, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971
- 18) Snowdon, J.C. : Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968
- 19) 松本, 佐藤, 西岡, 塩尻: 歩行者の特性を考慮した歩道橋の動的設計に関する研究, 土木学会論文報告集, 第205号, 1972-9

## 第2章 参考文献

- 1) 溝田, 中村: 矩形断面柱の非定常揚力と後流の速度変動について, 構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集, 1974-12
- 2) 大塚, 鷺津, 富沢, 大屋: 箱型建物模型の風洞実験-強制振動法による空気力の測定-, 構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集, 1972-12
- 3) 田中, 伊藤: 充腹構造物の自励振動における空気力の特性, 土木学会論文報告集, №168, 1969-8
- 4) 成田, 横山, 伊藤: 斜張橋断面の空力特性(その1), 構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集, 1974-12
- 5) Ukeguchi, N., Sakata, H. and Nishitani, H. : An Investigation of Aeroelastic Instability of Suspension Bridges, Symposium on Suspension Bridges, Lisbon, Nov., 1966
- 6) Scanlan, R.H. and Sabzevari, A. : Suspension Bridge Flutter Revisited, ASCE Structural Engineering Conference / Seattle, Washington May, 1967
- 7) Sabzevari, A. and Scanlan, R.H. : Aerodynamic Instability of Suspension Bridges, Proc. of ASCE, EM2, April, 1968
- 8) 白石成入: 平板状構造物の曲げねじれフラッター特性に関する基礎的考察, 土木学会論文報告

集, №186, 1971-2

- 9) 中村, 溝田: ある箱型構造物の空力弾性的特性について, 構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集, 1972-12
- 10) 白石, 小川: 非線形動的空気力を考慮した吊橋の耐風応答解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, №244, 1975-12
- 11) Theodorsen, T. : General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, NACA, T.R. 496, 1935
- 12) Scanlan, R. H. : An Examination of Aerodynamic Response Theories and Model Testing Relative to Suspension Bridges, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971
- 13) Shiraishi, N. : An Investigation on Aerodynamic Responses of Plate-like Structures in Fluctuating Gusts, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971
- 14) 小川一志: 非線形空気力を受ける構造物の空力弾性振動について, 土木学会, 関西支部年次学術講演概要, 1975-4
- 15) Bleich, F. et al. : The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Bureau of Public Roads, U. S. Gov., 1950

### 第3章 参考文献

- 1) 土木学会・本州四国連絡橋耐風研究小委員会編: 本州四国連絡橋の耐風に関する調査研究報告書, 昭和50年
- 2) 白石, 小川: 非線形動的空気力を考慮した吊橋の耐風応答解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, №244, 1975-12
- 3) 森光, 伊藤, 宮田: 空気力の非線形性を考慮した構造物の空力弾性振動, 土木学会論文報告集, №219, 1973-11
- 4) Parkinson, G. V. and Smith, J. D. : The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator, Quarterly, Journal of Mechanics & Applied Mathematics, Oxford University Press, Ely House, London, England, Vol. XVII, Pt. 2, 1964
- 5) Golland, M. and Luke, Y. L. : A Study of the Bending-Torsion Aeroelastic Modes for Aircraft Wings, Journal of the Aeronautical

Sciences, Vol. 16, 1949

- 6) 中村, 吉村: 吊橋断面の2自由度フラッタにおける振動数比の影響および Selberg の式の検討, 構造物の耐風性に関する第3回論文集, 1974-12
- 7) 有江, 大久保, 榎波: 荒川大橋の耐風性について, 土木学会第23回年次学術講演会講演概要, 第I部門, 1968
- 8) Scruton, C.: An Experimental Investigation of the Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Prelim. Pub. for the Third Congress, Inter. Assoc. Bridge and Struct Eng'ng, 1948
- 9) 土木学会・本州四国連絡橋耐風研究小委員会編: 本州四国連絡橋の耐風に関する調査研究報告書, 昭和48年
- 10) 土木学会編: 土木技術者のための振動便覧, 昭和41年

#### 第4章 参考文献

- 1) 白石, 小川: 非線形動的空気力を考慮した吊橋の耐風応答解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, №244, 1975-12
- 2) Scanlan, R. H. and Sabzevari, A.: Suspension Bridge Flutter Revisited, ASCE Structural Engineering Conference/Seattle, Washington, May, 1967
- 3) Bleich, F. et al.: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, Bureau of Public Roads, U.S. Gov., 1950
- 4) Selberg, A.: Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, Acta Polytechnica Scandinavica, №308, Stockholm, 1961
- 5) 小川一志: 吊橋のフラッター振動モードについて, 土木学会, 関西支部年次学術講演概要, 1976-5
- 6) 白石, 佐岡, 小川: 非線形空気力を受ける吊橋の空力弾性振動について, 土木学会, 第30回年次学術講演会講演概要, 第1部, 1975-10
- 7) 久保, 宮田, 伊藤: 吊橋系の空力弾性振動の部分, 全体模型による風洞実験について, 構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集, 1974-12
- 8) 伊藤, 宮田, 武田: 吊橋の耐風性に及ぼす地形的効果, 土木学会, 第30回年次学術講演会講演概要, 第1部, 1975-10
- 9) Yamaguchi, Y. et al.: Aerodynamic Stability of Suspension Bridge

Under Erection, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971

- 10) Tate, J., Hara, H. and Shimada, T. : A Study on the Wind Stability of a Box Girder Suspension Bridge at Erection Stage, Proceedings, Wind Effects on Buildings and Structures, Tokyo, 1971
- 11) 白石, 浦田, 酒井 : 長大吊橋の架設時における耐風安定性に関する一考察, 土木学会論文報告集, № 250, 1976 - 6
- 12) 伊藤, 大竹, 杉山 : 架設中の吊橋の耐風性, 土木学会, 第 29 回年次学術講演会講演概要, 第 1 部, 1974 - 10
- 13) 小川一志 : フラッター振動モードを考慮した吊橋の耐風安定性について, 土木学会, 第 31 回年次学術講演会講演概要, 第 1 部, 1976 - 10
- 14) 田中, 尾形 : 複翼床断面に作用する空気力, 土木学会, 第 26 回年次学術講演会講演概要, 第 1 部, 1971 - 10

## 第 5 章 参 考 文 献

- 1) 小川一志 : フラッター振動モードを考慮した吊橋の耐風安定性について, 土木学会, 第 31 回年次学術講演会講演概要, 第 1 部, 1976 - 10
- 2) 倉西茂 : ダンパーによる吊橋のたわみ振動の制御について, 土木学会論文集, № 142, 1967 - 6
- 3) 倉西, 高橋 : ダンパーをもつはりのたわみ振動, 土木学会論文報告集, № 187, 1971 - 3
- 4) Crandall, S. H. and Mark, W. D. : Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, New York and London, 1963
- 5) Snowdon, J. C. : Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968



